



Experimenteel onderzoek van klokken van F. Hemony

<http://hdl.handle.net/1874/235622>

EXPERIMENTEEL ONDERZOEK VAN KLOKKEN VAN F. HEMONY

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR
IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE UNIVER-
SITEIT VAN AMSTERDAM, OP GEZAG VAN DEN
RECTOR-MAGNIFICUS DR. M. STRAUB, HOOG-
LEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE,
IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN OP
WOENSDAG 15 DECEMBER 1909, DES NAMIDDAGS
TEN 3½ URE, IN DE AULA DER UNIVERSITEIT







EXPERIMENTEEL ONDERZOEK
VAN KLOKKEN VAN F. HEMONY.

1947 12 15
1947 12 15
1947 12 15

Dins. Avond 8. 11. 1909

EXPERIMENTEEL ONDERZOEK VAN KLOKKEN VAN F. HEMONY

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR
IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE UNIVER-
SITEIT VAN AMSTERDAM, OP GEZAG VAN DEN
RECTOR-MAGNIFICUS DR. M. STRAUB, HOOG-
LEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE,
IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN OP
WOENSDAG 15 DECEMBER 1909, DES NAMIDDAGS
TEN 3½ URE, IN DE AULA DER UNIVERSITEIT

DOOR

ABRAHAM VAS NUNES,

GEBOREN TE AMSTERDAM.

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

ERVEN KRAMER
AMSTERDAM

Aan mijne Ouders.

Bij het eindigen mijner academische studie is het mij een aangename taak, mijn dank te betuigen aan de Hoogleraren der Wis- en Natuurkundige Faculteit, die tot mijne vorming hebben bijgedragen.

Met weemoed gedenk ik mijne leermeesters LOBRY DE BRUYN en BAKHUIS ROOZEBOOM.

Hooggeleerde ZEEMAN, hooggeschatte Promotor! Aanvaard gij in het bijzonder mijne groote erkentelijkheid voor den steun en de bereidwilligheid, die ik als student aan het Natuurkundig Laboratorium steeds en bij het bewerken van dit proefschrift in bijzondere mate van U heb mogen ondervinden.

INHOUD.

	Pag.
INLEIDING	1
HOOFDSTUK I. BEPALING VAN TOONHOOGTE EN BOVENTONEN DER	
KLOKKEN	6
„ II. GEDAANTE EN AFMETINGEN DER KLOKKEN . .	16
„ III. SAMENSTELLING VAN HET KLOKKEMETAAL. . .	39
„ IV. GEWICHT DER KLOKKEN <i>B</i> , <i>dis</i> EN <i>fis</i> <i>I</i> . .	42
„ V. GRONDTOON EN BOVENTONEN	49
„ VI. TRILLINGSWIJZEN DER KLOKKEN	67
OVERZICHT	98

INLEIDING.

De onderzoekingen op akustisch gebied zijn, in vergelijking althans met die welke op andere gedeelten der Physica betrekking hebben, gering in aantal. Er is zelfs menig terrein op het gebied der geluidsleer, dat nog zoo goed als geheel onbetreden is. Met name geldt dit voor een gedeelte der geluidsleer, dat juist met de praktijk in nauw verband staat. De instrumenten, die in de toonkunst gebruikt worden, zijn, elk voor zich, gekarakteriseerd door hun klank.

VON HELMHOLTZ heeft ons door zijne geniale onderzoekingen geleerd, wát eenzelfde toon op twee verschillende instrumenten verschillend doet klinken. De klank wordt — voor zoover wij weten — alleen door bijtonen bepaald. Waar het in de toonkunst van belang is, een bepaald klankgehalte te verkrijgen, of naar willekeur te wijzigen, daar behoeft men dus eene volledige kennis van de voorwaarden, waaronder deze of gene boventoon ontstaat. Den klank van een instrument zal men in zijne macht hebben, als men elken boventoon, elken combinatietoon naar willekeur kan doen optreden en de intensiteit ervan regelen.

Dat men van deze zaak theoretisch nog zeer weinig weet, is voorzeker gedeeltelijk daaraan toe te schrijven, dat de instrumenten, die in de toonkunst gebezigd worden en in vorm en in bouw afwijken van de uiterst

eenvoudige toongevende lichamen, die de physicus gebruikt en die hij zich veelal nog eenvoudiger moet denken, om ze wiskundig te kunnen nagaan. Hoe ingewikkeld zelfs dan nog de wiskundige beschouwingen kunnen worden, zien we bijvoorbeeld aan de berekeningen, tot welke de trillingen van eene rechte, homogene staaf leiden. Dan is het niet te verwonderen, dat een zuiver theoretisch onderzoek van de trillingen van een instrument in praxi eene onmogelijkheid blijkt. Wat te zeggen van den *vorm* der meeste instrumenten, die voor den mathematicus ontoegankelijk is? En wat van de massa-verdeeling, van den elasticiteitscoëfficient van het gebezigde materiaal op verschillende plaatsen? De onderstelling, dat hier van een theoretisch onderzoek niet veel heil is te verwachten, is niet gewaagd.

Het is bekend, dat de kennis van de bekwaamste muziekinstrumentmakers gebaseerd is op zooveel malen dit en zooveel malen dat geprobeerd te hebben, totdat zij eindelijk soms vinden, wat zij zochten. Eene eeuwenlange ondervinding heeft natuurlijk wel iets opgeleverd; zij weten nu wel in vele gevallen, welke vorm, welke afmetingen, welke plaats aan een of ander onderdeel in een instrument moeten gegeven worden, om den gewenschten klank te erlangen. Maar het aantal raadselen, waarvoor men blijft staan, is nog altijd legio. Het is geene zeldzaamheid, dat men eene fout in een instrument wil verbeteren volgens eene bepaalde methode, die steekhoudend is gebleken — en de methode faalt. De meest wonderlijke verhalen kan men vernemen over den invloed, die op den klank van een instrument kan worden uitgeoefend door veranderingen of afwijkingen, die wel aanwezig moeten zijn, maar aan de scherpste oplettendheid ontgaan. Men denke hier bijvoorbeeld eens aan de mystieke vermaardheid van den ongeëvenaarden violenbouwer

Stradivarius, aan de vruchteloze pogingen, die de beste instrumentmakers na hem hebben aangewend, om zijne instrumenten na te maken. En toch kan zelfs de meest voortreffelijke copie, wat klank aangaat, niet vergeleken worden met de violen van Stradivarius. Iets dergelijks geldt voor andere instrumenten en men kan wel zeggen, dat, waar het op klankgehalte aankomt, de maker nog steeds in het duister tast en door probeeren moet trachten, zijn doel te bereiken. Men vraagt zich dan echter onwillekeurig af, of een minutieus wetenschappelijk onderzoek niet spoediger en zekerder tot het verlangde resultaat leiden kon en of daardoor niet misschien zelfs meer bereikt kon worden, dan tot nu toe het geval is geweest. De physicus, die op dit gebied wil onderzoeken, moet natuurlijk over eene voldoende muzikale kennis beschikken.

De gewone kerk- of torenklok is ontegenzeggelijk een der eenvoudigste muziekinstrumenten, die in de praktijk gebruikt worden. Wat hare muzikale waarde aangaat, staat zij betrekkelijk laag. Eene klok, die een muzikaal reinen klank voortbrengt, heb ik zelden of nooit gehoord en wanneer men den klank van eene klok, van zijne onzuiverheden ontdaan, wil doen hooren, vervangt men haar door eene stalen staaf. Wagner heeft dit het eerst gedaan in zijn „Parsifal”. Toch maakt men wel degelijk onderscheid tusschen klokken van fraaien en van onaangenen klank. De klokken, door de gebroeders HEMONY in de 17^{de} eeuw gegoten, zijn beroemd geworden, terwijl toch vele andere, die ongeveer denzelfden vorm en dezelfde samenstelling hebben, hinderlijk „valsch” zijn.

De vraag waarom de gietsels van HEMONY zoo fraai klinken in tegenstelling met vele andere is zeker zeer interessant. Langs theoretischen weg is men aan het probleem, dat door *dikwandige* klokken gesteld wordt,

zelfs nog niet begonnen. Ook experimenteel heeft men zeer weinig over kerkklokken gewerkt. Prof. ZEEMAN meende daarom dat een experimenteel onderzoek van eenige kerkklokken van belang kon zijn. Van een aantal feiten, die bij zulk een onderzoek zijn gevonden, wordt in de navolgende bladzijden verslag gegeven, terwijl de uitkomsten met het theorema der dynamische gelijkvormigheid in verband zijn gebracht.

De eerste moeilijkheid was, aan geschikt materiaal te komen. Niet alleen geschikt wat aangaat het maaksel en de hoeveelheid, maar wat hier zeker niet te onderschatten is, de plaats. Aanvankelijk hoopte ik te zullen slagen in het Rijksmuseum te Amsterdam, waar een aantal klokken ten toon gesteld worden. De meeste daarvan bleken echter gebarsten of op andere wijze verminkt en bovendien stonden ze op den grond. Het ophangen zou slechts met groote moeite en kosten kunnen gebeuren. De heer ADDICX, stadsuurwerkmaker te Amsterdam, beval mij echter aan, de groote en fraaie klokken van den Zuiderkerktoren voor een onderzoek te kiezen. Voor de welwillendheid waarmede de heer ADDICX mij steeds ten dienste stond, betuig ik hem op deze plaats gaarne mijn dank.

Beneden in genoemden toren hangen drie zeer groote luidklokken. Zij zijn vrij goed beschut en (betrekkelijk!) gemakkelijk te naderen. Twee daarvan dragen den naam van FRANCISCUS HEMONY en het jaartal 1656. De andere, de grootste, schijnt een verdwaald exemplaar te zijn, heeft een anderen vorm, eene andere kleur en draagt eene Latijnsche inscriptie, die vermeldt, dat de klok gegoten is door WILHELMUS MOER en gebroeders JASPERS in het jaar 1511. Deze drie klokken heb ik zoo volledig mogelijk onderzocht.

Boven in den toren hangt het carillon bestaande uit ruim dertig klokken en klokjes. Het toeval diende mij hier: op een paar der kleinste na, dragen alle

exemplaren den naam van F. HEMONY. Intusschen kon dit stel slechts onvolledig onderzocht worden, vooreerst omdat sommige gedeeltelijk, de meeste echter geheel ontoegankelijk waren en dan ook door het gedruisch dat van de straten opsteeg en de bijna onafgebroken stoornis, door den wind veroorzaakt.

HOOFDSTUK I.

Bepaling van toonhoogte en boventonen der klokken.

Bij de bepaling van de hoogte der grondtonen van klokken moet men zich geheel verlaten op de scherpte van het gehoororgaan. De zuiver physische methode toch kan hier niet in praktijk worden gebracht. Men zou dan bijv. de trillingen moeten laten opteekenen op een met roetzwart bedekten cylinder en dan het aantal trillingen, per secunde volbracht, moeten uittellen. Hieruit zou men dan de toonhoogte vinden. Het is bijna overbodig te zeggen, dat de opstelling van de daartoe benoodigde instrumenten in de gegeven omstandigheden niet doenlijk was. Bij de schatting der toonhoogte met het oor zal men zich dus met eene benadering tevreden moeten stellen, eene benadering, die echter zeer groot kan zijn.

Lord RAYLEIGH bepaalde van elke klok de toonhoogte door vergelijking met de tonen van een harmonium.¹⁾ Wanneer de klok, zooals bij het onderzoek van Lord RAYLEIGH meestal het geval schijnt geweest te zijn, overgebracht kan worden naar een laboratorium, bestaat tegen deze methode weinig bezwaar. De door mij onderzochte klokken waren echter alle in eene ruimte opgehangen, waar men moeielijk een harmo-

¹⁾ RAYLEIGH, *The Theory of Sound*, I pag. 393.

nium kon plaatsen. Alleen met eene normaal-stemvork gewapend, moest ik de grondtonen vaststellen. De toon der vork was ongeveer de normale a' van 435 geheele trillingen per secunde, gelijk die gekozen is op de Internationale Stimntonkonferenz te Weenen in 1885.

Deze stemvork heb ik vergeleken met eene stemvork van SECRETAN, die geijkt was op 435 trillingen. Van de laatste heb ik het trillingsgetal op twee wijzen bepaald.

1°. Met eene sirene.

De sirene werd in beweging gebracht door een luchtstroom, welke verkregen werd met behulp van een driephasenstroom-motor. Deze luchtstroom bleek uit de toonhoogte op zeer weinig na constant te blijven; kleine veranderingen in den luchttoevoer konden met een klemkraantje aangebracht worden. Het telwerk der sirene bleef steeds ingeschakeld, om verandering van snelheid te vermijden. De toon der sirene werd op de hoogte gebracht van de stemvork van SECRETAN, die geijkt was op 435 trillingen. Zwevingen konden hierbij uitstekend worden waargenomen en geteld. Zoodra de zwevingen verdwenen waren, werd het oogenblik afgewacht, dat het telwerk een geheel aantal duizendtallen aanwees en op dat oogenblik het uurwerk van een stophorloge in gang gezet. Na verloop van een geheel aantal duizendtallen van omwentelingen werd het horloge weder stop gezet. Op deze wijze vond ik:

Aantal omwentelingen.	Tijd.	Trillingsgetal.
2000	92,0 sec.	433,78
3000	138,0 „	433,78
2000	92,2 „	432,84
2000	92,0 „	433,78
1000	46,2 „	431,91
5000	231,2 „	431,54

De schijf der sirene had 20 openingen. 1 seconde van het stophorloge kwam overeen met 0,9996 middelbare seconden, zooals uit herhaalde vergelijking met een goed zakhorloge bleek, d. i. met 1,0023 sterreseconden. Hieruit volgen voor de verschillende trillingsgetallen der vork de waarden in den 3^{den} kolom. Bij de voorlaatste waarneming was de tijd blijkbaar te klein in vergelijking van de waarnemingsfout in de tijdsopname; bij de laatste meting was de tijd te lang, om den toon volkomen standvastig te houden. Laten we de laatste twee daarom buiten rekening, dan vinden we voor de gemiddelde waarde van het trillingsgetal:

433,55

2°. Met de graphische methode.

Aan de bovengenoemde vork van SECRETAN werd met een weinig zegellak een zeer dun stukje staal-draad bevestigd, dat de trillingen op een horizontalen, met roetzwart bedekten cylinder teekende. Deze cylinder had eene lengte van 11,5 cM., een diameter van 5 cM. Op de draaiingsas was een schroefdraad aangebracht met een spoed van 4,1 mM. Om de golven niet te kort en duidelijk te krijgen, moest de de cylinder wegens zijn kleinen diameter vrij snel worden rondgedraaid. Dit geschiedde eenvoudig met de hand. Op *dezelfde beschrijvende lijn*, waarop het staal draadje den cylinder aanraakte en op een afstand van ongeveer 1 mM. daarvan rustte de punt van de stift, die de seconden aantekende. Dit geschiedde op de gewone wijze met behulp van een secondenslinger en een electromagneet. Door de genoemde opstellingswijze van stemvork en secondenstift was het niet noodig, dat de cylinder zich *eenparig* bewoog. Na afloop der proef werd de laag roetzwart gefixeerd en het aantal golvingen geteld met eene loupe. De

1^{ste} kolom van onderstaand tabelletje geeft het aantal golvingen opwaarts afgerond na het 1^{ste}, 2^{de}, 3^{de} teeken enz. van den secundenslinger. In de 2^{de} kolom staat het aantal golvingen, tusschen twee opvolgende teekens begrepen.

0.	443
443	419
862	442
1304	419
1723	441?
2164	418
2582	442
3024	418
3442	442
3884	418
4302	443
4745	

Het getal 441 is onzeker, omdat de golflijn op een plekje een weinig beschadigd was. De getallen doen zien, dat de heen- en de weergang van den slinger niet even lang duurden. Daarom hebben we een even aantal waarnemingen noodig. Het gemiddelde wordt dan 430,2 per slingering (heen- of weergang). De secundenslinger werd nu gecontrôleerd met het stophorloge. Uit een tiental waarnemingen van 500 slingeringen bleek gemiddeld

1 slingering = 0,9938 sec. van het stophorloge,

waaruit volgt voor den slingertijd van den slinger

0,9961 sterreseconde.

Het aantal trillingen der stemvork was dus volgens deze methode

$$\frac{430,2}{0,9961} = 431,89.$$

Hoewel de grafische methode onafhankelijk is van waarnemingsfouten, is toch het bezwaar van de massa-vergrooting der vork door het staaldraadje en misschien ook de vertraging der trillende beweging door den weerstand bij het krassen in het roetzwart, blijkbaar niet te verwaarloozen. Intusschen mag men uit de omstandigheid, dat met de sirene driemaal volkomen dezelfde waarde werd gevonden, afleiden dat de eerste methode voldoende nauwkeurig was.

De vork, die ik gebruikt heb bij het onderzoek der klokken, was veel kleiner; (lengte der beenen 7,5 c.M., diameter 3,5 m.M., afstand der beenen 6,5 m.M.). De trillingen waren daarom te zwak om haar goed te kunnen hooren naast den sterken toon der sirene, of om eene duidelijke golflijn te teekenen. Ik bepaalde daarom het aantal zwevingen dat deze vork gaf met de gecontroleerde vork van SECRETAN, die iets hooger was en vond daarvoor met het stophorloge

10 zwevingen in 6,4 seconden.

Hieruit volgt voor het trillingsgetal van de kleine stemvork bijna

dus een verschil van 3 trillingen met de normale a' , welk verschil bij de bepaling van de toonhoogte der klokken van geen practisch belang was.

Natuurlijk was kennis van alle mogelijke intervallen noodzakelijk. Met een behoorlijk geoefend oor geschiedt op deze wijze de bepaling vrij eenvoudig, snel en voldoende nauwkeurig. Stel dat men een of anderen toon hoorende en hem vergelijkende met de normale a' hem als de bovenquint van die a' herkent, dus als e'' , dan is er altijd eenige speling mogelijk, zonder dat men dit quint-interval bepaald als valsch zal kunnen aanmerken. (Hierop berust juist de gelijkzwevende temperatuur). Vergelijkt men daarentegen den waargenomen toon met de normale e'' , dan kan men een klein verschil veel nauwkeuriger nagaan en wel met behulp der zwevingen en op deze wijze zelfs het *aantal* trillingen met zekerheid vaststellen. Intusschen mag men niet aannemen, dat dit geschieden kan met behulp van een harmonium. Immers de tonen van een harmonium zijn te onstandvastig; hunne hoogte is afhankelijk van de temperatuur, van den vochtigheidstoestand, van den barometerstand en van de intensiteit van aanblazen. Inderdaad meen ik, dat de onnauwkeurigheid, door deze invloeden veroorzaakt, veel grooter kan zijn dan de fout, die men — met een voldoende scherp gehoor — maken kan door alle tonen te vergelijken met eenzelfde, de normale a' van eene stemvork. De stemvork is niet onderhevig aan de genoemde invloeden, of althans in zeer geringe mate. Daarenboven is de toon van eene stemvork bijna volkomen enkelvoudig, terwijl de toon van eene orgelpijp rijk is aan boven-tonen, waardoor hij als vergelijkingston minder geschikt is.

Eindelijk dient hierbij opgemerkt, dat in de meeste gevallen — zooals wel te verwachten is — de hoogte

van een toon niet juist overeenkwam met een toon, dien men door een naam of teeken kan aanwijzen. Niet zelden kwam het voor, dat een toon lag tusschen twee opeenvolgende van den chromatischen toonladder. Lag een toon bijvoorbeeld tusschen *g* en *gis* maar het dichtst bij *g*, dan beschouwde ik hem als *g* en wijs hem aan door *g* +; lag hij echter dichtter bij *gis*, dan door *gis* —.

De grondtonen der drie luidklokken, beneden in den toren opgehangen, bleken te zijn:

B, dis, fis.

De grondtonen van de klokken, in het carillon onderzocht, waren *fis, g, gis, a, ais, b, c', cis', d', dis', e', gis', a', ais', b'*. De hier gevolgde schrijfwijze is in overeenstemming met het schema:

$C_{-2}, C_{-1}, C, c, c', c'', c'''$ enz.

Daar voor de trillingsgetallen de gelijkzwevende temperatuur als basis zal genomen worden, behoeft hier geen onderscheid gemaakt te worden tusschen *ais* en *bes*, *cis* en *des*, enz. Van deze verwisseling zal in het vervolg, waar 't noodig of wenschelijk mocht zijn, gebruik gemaakt worden.

Met het woord „grondtoon” wordt niet *altijd* de laagste toon bedoeld. Voor de juiste beteekenis in verband met die van den term „hoofdtoon” zie men onder hoofdstuk V.

Van de klokken in het carrillon aanwezig mag zeker als bijzonderheid in de eerste plaats opgemerkt worden, dat ze *alle* den naam van een toon dragen, dien ze niet geven. Het verschil bedraagt steeds een halven toon. De klok bijv. die met *g* gemerkt is, is

in werkelijkheid *fis*, die *c*. gemerkt is, *b* enz. Dit verschil ligt dus daaraan, dat wat wij eene normale *a'* noemen, ten tijde van HEMONY *ais'* genoemd werd. Natuurlijk doet dit tot hare *relatieve* zuiverheid niets; ze zijn toch chromatisch gestemd.

Bij het onderzoek naar het klankgehalte der verschillende klokken, d. w. z. naar den grondtoon met de tegelijk aanwezige boventonen of bijtonen, zou men met vrucht gebruik kunnen maken van een stel resonatoren van HELMHOLTZ. De herkenning van een of anderen toon geschiedt dan, zelfs met een betrekkelijk weinig geoefend oor snel en zeker. Het stel klankbollen, dat te mijner beschikking stond in het Amsterdamsche Laboratorium, ten getale van 8, resonanceert echter slechts op natuurlijke boventonen van C_1 , n.l. op *c*, *g*, *c'*, *e'* enz. Uit het vervolg zal men echter zien, dat hier alleen met voordeel van klankbollen gebruik gemaakt kon worden, wanneer men te beschikken had over een zeer groot aantal, die elkander in de orde van den chromatischen toonladder opvolgen. Aangezien ik zulk een stel niet verkrijgen kon en daar bovendien het gebruik van eenigszins groote resonatoren in de beperkte ruimte niet zonder gevaar van beschadiging kon plaats hebben, bleef mij geen ander middel over, dan de boventonen met het ongewapende oor te zoeken, eene taak, die zelfs van een goed ontwikkeld gehoororgaan vaak groote inspanning vordert. Het is licht te begrijpen, dat men bij de poging, om een zwakken boventoon te ontdekken, voorzichtig moet zijn, zich niet te laten misleiden door het geweldige, alles overheerschende geluid van den grondtoon, wanneer eene torenklok eenigszins krachtig wordt aangeslagen.

Wanneer eene stemvork wordt aangeslagen, hoort

men gedurende een zeer korten tijd een hoogen boventoon (bij vele vorken de kleine sexte van het octaaf), die echter zeer spoedig wegsterft, terwijl de grondtoon nagenoeg alleen overblijft. Iets dergelijks heeft bij eene aangeslagen klok plaats. Wil men vele boventonen hooren, dan heeft men de klok in zeer krachtige trilling te brengen en moet zich den tijd van weinige secunden ten nutte maken, om de hooge boventonen te kunnen waarnemen. Want juist dadelijk na het aanslaan is het geluid het rijkst aan boven-trillingen, en het valt niet gemakkelijk de verschillende tonen uit zulk eene, vaak ingewikkelde, verzameling te onderkennen, juist dan, wanneer ook de grondtoon op zijn krachtigst medeklinkt. Het oor wordt als het ware telkens afgeleid en opnieuw in beslag genomen door den grondtoon (niet zelden ook door den eersten of tweeden boventoon).

Intusschen doet veel oefening hier menig bezwaar overwinnen.

Bij sommige onderzoeken, die hierna zullen worden vermeld, deed zich echter eene nog grootere moeilijkheid voor, n.l. waar het erop aankomt, de gedaante van de knooplijnen na te gaan. Natuurlijk behoort bij elken toon, die de klok voortbrengt, een verschillend aantal knooplijnen en kunnen we dus alleen maar spreken van een bepaald systeem van knooplijnen bij één bepaalden toon. Wij zullen in hoofdstuk VI zien dat voor de bepaling daarvan o. m. noodig is het constateeren van eene minimale toonintensiteit. Voor dit onderzoek is het derhalve niet alleen noodzakelijk één bepaalden toon goed te onderscheiden, maar wordt nu ook nog gevorderd, onderscheid in intensiteit ervan te hooren, als het oor zich langs het oppervlak der klok verplaatst.

Duidelijkheidshalve mogen de gevondene grondtonen met de bijbehorende trillingsgetallen, berekend naar

de gelijkzwevende temperatuur ($a' = 435$ tr.) hieronder opgegeven worden:

<i>B</i>	<i>dis</i>	<i>fis</i>	<i>g</i>	<i>gis</i>	<i>a</i>	<i>ais</i>	<i>b</i>	<i>c'</i>	<i>cis'</i>
122,07	153,8	182,9	193,8	205,3	217,5	231,4	244,1	258,7	274,0

<i>d'</i>	<i>dis'</i>	<i>e'</i>	—	<i>gis'</i>	<i>a'</i>	<i>ais'</i>	<i>b'</i>
290,3	307,6	325,9	—	410,6	435,0	460,9	488,8

Daar er twee klokken waren die denzelfden grondtoon *fis* gaven, willen wij deze voortaan aanduiden door *fis I* en *fis II*. Beide klokken zijn, zooals gezegd, door HEMONY vervaardigd. Zij toonden in alle opzichten merkwaardige overeenkomst, zooals uit het vervolg blijken zal.

HOOFDSTUK II.

Gedaante en afmetingen der klokken.

Eene vraag, die zich bij het onderzoek vanzelf in de eerste plaats voordeed, was, de afmetingen van elke klok na te gaan. Wat den drie luidklokken betreft, daarvan heb ik zoowel de in- als de uitwendige afmetingen bepaald; wat het carillon aangaat, is het mij slechts mogelijk geweest, van het eerste elftal de uitwendige te bepalen.

A. *Uitwendige afmetingen.*

Om den diameter op verschillende hoogten te bepalen, in de onderstelling dat het oppervlak een omwentelingsoppervlak is en van alle zijden bereikbaar, behoefde ik slechts met een draad den omtrek te meten. Nu is het weliswaar niet gemakkelijk, een draad zóó langs het oppervlak te spannen, dat hij langs eene doorsnede loodrecht op de as valt, maar dit werk werd mij bijzonder vergemakkelijkt doordat elke klok op verschillende hoogten een aantal cirkelvormige opgelegde randen draagt, waarschijnlijk met geen ander doel dan ter versiering der klok aangebracht. In den regel bedraagt dit aantal ongeveer 20. Overal waar zulk een rand aanwezig was, behoefde ik er slechts een draad langs te

spannen. De randen waren meestal dik genoeg om het afglijden van den draad tijdens het spannen te beletten. Wat de hoogte betreft, deze heb ik gemeten door in of nabij het middelpunt van den bodem een draad vast te maken en dien zoo nauwkeurig mogelijk horizontaal te stellen en den afstand te bepalen van dezen draad tot het punt van den onderrand verticaal onder den draad gelegen. Dit kon aanleiding geven tot fouten, als de as der klok aanzienlijk afweek van den verticalen stand. Bij de vast opgehangen klokken van het carillon kwam dit, voor zoover ik kon nagaan, niet voor. Bij de luidklokken, die natuurlijk draaibaar waren om eene horizontale as, kon de fout verbeterd worden.

Voorts werden een aantal bogen van eene meridiaan-doorsnede gemeten met een in millimeters verdeeld stalen lint.

Fig. 1 geeft in hoofdzaak den vorm van de uitwendige asdoorsnede der onderzochte klokken weer. De letters d_1 , d_2 , d_3 , d_4 en d_5 wijzen den diameter aan op de desbetreffende hoogte; de totale hoogte wordt aangewezen door h ; de bogen k , l , m , p en q bepalen in hoofdzaak de punten, waar het oppervlak van convex concaaf wordt of omgekeerd. In de volgende tabel zijn de genoemde afmetingen in centimeters opgegeven.

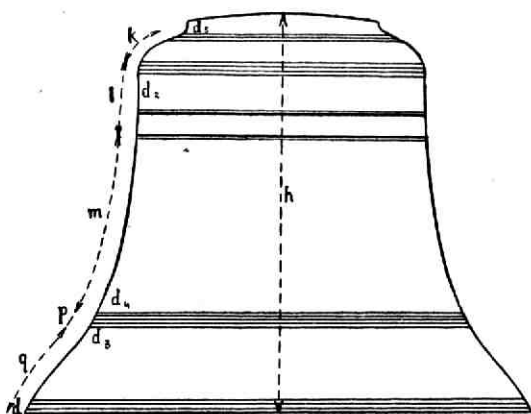


Fig. 1.

De afmeting k ontbreekt aan de eerste klok, die

vooral wat het bovengedeelte betreft, reeds op het eerste gezicht van de andere afwijkt. De bodem is bijna plat en gaat terstond in eene geheel convexe bocht in den mantel over.

Grond- toon.	Trillings- getal.	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	h	k	l	m	p	q
<i>B</i>	122,07	169,0	96,0	144,3	135,0	52,2	132,0	—	15,0	85,0	6,5	24,5
<i>dis</i>	153,8	130,0	74,0	103,7	96,4	49,3	104,0	12,5	15,0	53,0	6,3	23,5
<i>fis I</i>	182,9	109,0	62,0	87,0	79,9	44,5	87,0	8,5	15,5	42,0	7,0	20,0
<i>fis II</i>	182,9	111,6	62,2	88,3	79,9	44,6	87,0	9,8	13,8	43,0	7,0	20,0
<i>g</i>	193,8	102,8	59,8	84,3	76,4	42,6	82,0	10,0	13,0	38,0	7,0	19,0
<i>gis</i>	205,3	96,5	56,2	78,1	71,7	40,1	77,0	9,3	11,2	39,0	6,0	18,0
<i>a</i>	217,5	92,1	53,5	75,0	67,8	38,8	73,2	8,7	9,8	37,2	6,8	16,8
<i>ais</i>	230,4	86,2	50,1	70,2	63,6	36,3	69,5	8,1	9,8	34,5	6,5	16,2
<i>b</i>	244,1	81,4	47,1	65,9	60,1	33,1	65,1	7,2	9,3	32,1	5,4	15,0
<i>c'</i>	258,7	77,2	44,7	60,7	55,6	32,0	59,1	7,2	9,2	30,7	5,0	14,1
<i>cis'</i>	274,0	72,5	42,3	58,7	53,7	30,3	58,6	6,6	8,5	28,8	4,9	13,8
<i>d'</i>	290,3	69,7	40,7	57,3	51,4	29,1	56,0	6,8	8,8	26,9	5,1	12,1
<i>dis'</i>	307,6	65,4	38,5	54,5	48,8	27,9	53,1	5,9	8,0	25,3	5,0	12,1
<i>e'</i>	325,9	61,9	36,3	50,7	45,8	26,4	49,5	5,7	8,8	22,4	4,5	11,3

De uitwendige asdoorsneden of profielen van alle klokken behalve de eerste vertoonden reeds bij oppervlakkige beschouwing eene duidelijke gelijkvormigheid. Natuurlijk was het van belang na te gaan, of die gelijkvormigheid volkomen was, m. a. w. of HEMONY aan al zijne klokken eenzelfde vorm heeft willen geven en zoo ja, in hoeverre daarin zijne nauwkeurigheid vermocht te gaan. Vooreerst willen we dit dus nagaan voor de uitwendige profielen, door van alle klokken de verhouding op te maken tusschen de hoogten (h), de vijf genoemde middellijnen ($d_1 \dots d_5$) en de bogen $k + l + m + p + q$ (d. i. de geheele lengte van een meridiaan). In de eerstvolgende tabel zijn deze verhoudingen opgeschreven voor de klok *dis* met al de overige; in de daarop volgende tabel voor de klok *fis I* met al de dan nog overige enz. Bovendien is in elke tabel eene kolom opgenomen, aangevende de verhouding der trillingstijden van de

erboven genoemde klok met alle overige. De getallen zijn in twee decimalen opgegeven, daar de verdere decimalen op de practische zuiverheid zeker niet meer van invloed zijn.

dis 153,8 tr.

Grondtoon.	<i>h</i>	<i>d</i> ₁	<i>d</i> ₂	<i>d</i> ₃	<i>d</i> ₄	<i>d</i> ₅	<i>k</i> + <i>l</i> + <i>m</i> + <i>p</i> + <i>q</i>	Trillings- tijden.
<i>fis</i> I	1,19	1,19	1,19	1,19	1,21	1,11	1,19	1,19
<i>fis</i> II	1,19	1,18	1,19	1,17	1,21	1,10	1,19	1,19
<i>g</i>	1,27	1,26	1,24	1,23	1,26	1,16	1,30	1,26
<i>gis</i>	1,35	1,35	1,32	1,33	1,34	1,23	1,32	1,33
<i>a</i>	1,42	1,41	1,38	1,39	1,42	1,27	1,39	1,41
<i>ais</i>	1,50	1,51	1,48	1,48	1,50	1,36	1,47	1,50
<i>b</i>	1,60	1,60	1,57	1,57	1,61	1,49	1,59	1,59
<i>c'</i>	1,76	1,69	1,66	1,71	1,73	1,54	1,67	1,68
<i>cis'</i>	1,78	1,79	1,75	1,77	1,80	1,63	1,76	1,78
<i>d'</i>	1,86	1,87	1,82	1,81	1,89	1,69	1,85	1,89
<i>dis'</i>	1,96	1,99	1,92	1,89	1,98	1,77	1,96	2,00
<i>e'</i>	2,10	2,10	2,04	2,05	2,10	1,87	2,09	2,12

fis I 182,9 tr.

Grondtoon.	<i>h</i>	<i>d</i> ₁	<i>d</i> ₂	<i>d</i> ₃	<i>d</i> ₄	<i>d</i> ₅	<i>k</i> + <i>l</i> + <i>m</i> + <i>p</i> + <i>q</i>	Trillings- tijden.
<i>fis</i> II	1,00	1,02	1,00	1,01	1,00	1,00	1,01	1,00
<i>g</i>	1,06	1,06	1,04	1,03	1,05	1,04	1,09	1,06
<i>gis</i>	1,13	1,13	1,10	1,11	1,11	1,11	1,14	1,12
<i>a</i>	1,19	1,18	1,16	1,16	1,18	1,15	1,17	1,19
<i>ais</i>	1,25	1,26	1,24	1,24	1,27	1,23	1,24	1,26
<i>b</i>	1,32	1,34	1,32	1,32	1,33	1,34	1,35	1,33
<i>c'</i>	1,41	1,41	1,40	1,43	1,44	1,39	1,41	1,41
<i>cis'</i>	1,48	1,50	1,47	1,48	1,50	1,47	1,49	1,50
<i>d'</i>	1,55	1,56	1,52	1,52	1,55	1,53	1,56	1,59
<i>dis'</i>	1,64	1,67	1,61	1,60	1,64	1,61	1,65	1,68
<i>e'</i>	1,78	1,76	1,71	1,72	1,74	1,69	1,77	1,78

fis II 182,9 tr.

Grond- toon.	<i>h</i>	<i>d</i> ₁	<i>d</i> ₂	<i>d</i> ₃	<i>d</i> ₄	<i>d</i> ₅	<i>k</i> + <i>l</i> + <i>m</i> + <i>p</i> + <i>q</i>	Trillings- tijden.
<i>g</i>	1,06	1,09	1,04	1,05	1,05	1,05	1,08	1,06
<i>gis</i>	1,13	1,16	1,11	1,13	1,11	1,11	1,12	1,12
<i>a</i>	1,19	1,21	1,16	1,18	1,18	1,15	1,18	1,19
<i>ais</i>	1,25	1,30	1,24	1,26	1,27	1,23	1,25	1,26
<i>b</i>	1,32	1,37	1,32	1,34	1,33	1,35	1,36	1,33
<i>c'</i>	1,41	1,45	1,39	1,46	1,44	1,39	1,41	1,41
<i>cis'</i>	1,48	1,54	1,47	1,50	1,50	1,47	1,50	1,50
<i>d'</i>	1,55	1,60	1,53	1,54	1,54	1,53	1,57	1,59
<i>dis'</i>	1,64	1,71	1,62	1,62	1,62	1,60	1,66	1,68
<i>e'</i>	1,78	1,80	1,72	1,74	1,74	1,69	1,78	1,78

g 193,8 tr.

Grond- toon.	<i>h</i>	<i>d</i> ₁	<i>d</i> ₂	<i>d</i> ₃	<i>d</i> ₄	<i>d</i> ₅	<i>k</i> + <i>l</i> + <i>m</i> + <i>p</i> + <i>q</i>	Trillings- tijden.
<i>gis</i>	1,07	1,07	1,06	1,08	1,07	1,06	1,04	1,06
<i>a</i>	1,12	1,12	1,12	1,12	1,13	1,10	1,10	1,12
<i>ais</i>	1,18	1,19	1,19	1,20	1,20	1,17	1,16	1,19
<i>b</i>	1,26	1,26	1,27	1,28	1,27	1,29	1,26	1,26
<i>c'</i>	1,39	1,33	1,34	1,39	1,37	1,33	1,31	1,33
<i>cis'</i>	1,40	1,42	1,41	1,44	1,42	1,41	1,39	1,41
<i>d'</i>	1,46	1,48	1,47	1,47	1,49	1,46	1,46	1,50
<i>dis'</i>	1,54	1,57	1,55	1,55	1,57	1,53	1,55	1,59
<i>e'</i>	1,66	1,66	1,65	1,66	1,67	1,61	1,65	1,68

gis 205,3 tr.

Grond- toon.	<i>h</i>	<i>d</i> ₁	<i>d</i> ₂	<i>d</i> ₃	<i>d</i> ₄	<i>d</i> ₅	<i>k</i> + <i>l</i> + <i>m</i> + <i>p</i> + <i>q</i>	Trillings- tijden.
<i>a</i>	1,05	1,05	1,05	1,07	1,06	1,03	1,05	1,06
<i>ais</i>	1,11	1,12	1,12	1,11	1,13	1,11	1,11	1,12
<i>b</i>	1,18	1,19	1,19	1,19	1,19	1,21	1,21	1,19
<i>c'</i>	1,30	1,31	1,26	1,29	1,29	1,25	1,26	1,26
<i>cis'</i>	1,31	1,33	1,33	1,33	1,34	1,32	1,33	1,33
<i>d'</i>	1,38	1,39	1,38	1,36	1,40	1,38	1,40	1,41
<i>dis'</i>	1,45	1,48	1,46	1,43	1,47	1,44	1,48	1,50
<i>e'</i>	1,56	1,56	1,56	1,54	1,57	1,52	1,59	1,59

a 217,5 tr.

Grond-toon.	h	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	$k + l + m + p + q$	Trillings-tijden.
<i>ais</i>	1,05	1,07	1,07	1,07	1,07	1,09	1,06	1,06
<i>b</i>	1,12	1,13	1,14	1,14	1,13	1,17	1,15	1,12
<i>c'</i>	1,24	1,19	1,20	1,24	1,22	1,21	1,23	1,19
<i>cis'</i>	1,25	1,27	1,27	1,28	1,26	1,28	1,27	1,26
<i>d'</i>	1,31	1,32	1,31	1,31	1,32	1,33	1,33	1,33
<i>dis'</i>	1,38	1,41	1,39	1,38	1,39	1,39	1,40	1,41
<i>e'</i>	1,48	1,49	1,47	1,48	1,48	1,47	1,51	1,50

ais 230,4 tr.

Grond-toon.	h	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	$k + l + m + p + q$	Trillings-tijden.
<i>b</i>	1,07	1,06	1,06	1,07	1,06	1,10	1,09	1,06
<i>c'</i>	1,15	1,12	1,12	1,16	1,14	1,13	1,13	1,12
<i>cis'</i>	1,19	1,19	1,18	1,20	1,18	1,20	1,20	1,19
<i>d'</i>	1,27	1,24	1,23	1,23	1,24	1,25	1,26	1,26
<i>dis'</i>	1,34	1,32	1,30	1,29	1,30	1,30	1,33	1,33
<i>e'</i>	1,40	1,39	1,38	1,39	1,39	1,38	1,42	1,41

b 244,1 tr.

Grond-toon.	h	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	$k + l + m + p + q$	Trillings-tijden.
<i>c'</i>	1,10	1,05	1,05	1,09	1,08	1,03	1,04	1,06
<i>cis'</i>	1,11	1,12	1,11	1,12	1,12	1,09	1,10	1,12
<i>d'</i>	1,16	1,17	1,16	1,15	1,17	1,14	1,16	1,19
<i>dis'</i>	1,23	1,25	1,22	1,21	1,23	1,19	1,23	1,26
<i>e'</i>	1,31	1,32	1,30	1,30	1,31	1,25	1,31	1,33

c' 258,7 tr.

Grond-toon.	h	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	$k + l + m + p + q$	Trillings-tijden.
<i>cis'</i>	1,01	1,07	1,06	1,03	1,04	1,06	1,06	1,06
<i>d'</i>	1,06	1,11	1,10	1,06	1,08	1,10	1,11	1,12
<i>dis'</i>	1,11	1,18	1,16	1,11	1,14	1,15	1,17	1,19
<i>e'</i>	1,22	1,25	1,23	1,20	1,21	1,21	1,26	1,26

cis' 274,0 tr.

Grond- toon.	<i>h</i>	<i>d</i> ₁	<i>d</i> ₂	<i>d</i> ₃	<i>d</i> ₄	<i>d</i> ₅	<i>k</i> + <i>l</i> + <i>m</i> + <i>p</i> + <i>q</i>	Trillings- tijden.
<i>d'</i>	1,05	1,04	1,04	1,02	1,05	1,04	1,05	1,06
<i>dis'</i>	1,10	1,11	1,10	1,07	1,10	1,09	1,11	1,12
<i>e'</i>	1,18	1,17	1,17	1,17	1,17	1,15	1,19	1,19

d' 290,3 tr.

Grond- toon.	<i>h</i>	<i>d</i> ₁	<i>d</i> ₂	<i>d</i> ₃	<i>d</i> ₄	<i>d</i> ₅	<i>k</i> + <i>l</i> + <i>m</i> + <i>p</i> + <i>q</i>	Trillings- tijden.
<i>dis'</i>	1,06	1,07	1,06	1,05	1,05	1,04	1,06	1,06
<i>e'</i>	1,13	1,13	1,12	1,13	1,12	1,10	1,13	1,12

dis' 307,6 tr.

Grond- toon.	<i>h</i>	<i>d</i> ₁	<i>d</i> ₂	<i>d</i> ₃	<i>d</i> ₄	<i>d</i> ₅	<i>k</i> + <i>l</i> + <i>m</i> + <i>p</i> + <i>q</i>	Trillings- tijden.
<i>e'</i>	1,07	1,06	1,06	1,07	1,07	1,06	1,07	1,06

Een blik op bovenstaande tabellen leert, dat alle getallen in eenzelfde horizontale rij over het algemeen weinig met elkander verschillen. Alleen de diameter *d*₅ vertoont afwijkingen van gemiddeld 3 à 4 %, een paar malen van 8 à 9 %. Maar dergelijke verschillen in de nabijheid van den bovenrand der klok zullen waarschijnlijk weinig of niets veranderen aan hare toonhoogte. Het is a priori duidelijk, dat deze veel meer afhangt van de hoogte, den diameter van de opening en de dikte van den wand op verschillende hoogten. Om de laatste te kunnen beoordeelen, moeten we de afmetingen van het binnenprofiel kennen. Alvorens de bepaling daarvan te bespreken, moet nog opgemerkt worden, dat ik ook nog de verhoudingen

heb berekend van de bogen k , l , m , p en q elk afzonderlijk. Deze wijken voor het meerendeel af van de boven gevonden getallen. Dit is niet te verwonderen, als men bedenkt, dat die bogen gemeten werden tusschen twee punten, waar de tot versiering dienende ringen waren aangebracht; tot den werkelijken vorm der klok doet de plaats dezer punten niets.

Wanneer men de vrij geringe afwijkingen in de bovenstaande tabellen op rekening stelt van fouten, die wel onvermijdelijk waren bij de constructie van het profiel en bij het gieten der klokken eenerzijds, en bij mijne metingen andererseits, dan mag men besluiten, *dat 1^o de uitwendige profielen van HEMONY's klokken gelijkvormig zijn; 2^o de verhouding van de overeenkomstige afmetingen dezer profielen gelijk is aan die van de trillingstijden der grondtonen.*

B. Inwendige afmetingen.

Voor deze bepaling is het bij groote klokken noodzakelijk, dat zij zoo hoog boven den grond hangen, dat het binnenoppervlak overal bereikbaar is. Alleen de drie luidklokken leenden zich tot deze bepaling.

Van verschillende handelwijzen, die ik daarbij heb toegepast of trachten toe te passen, voldeed de volgende wel het best, in aanmerking genomen, dat ik mij met eenvoudige hulpmiddelen tevreden moest stellen, daar er geene gelegenheid was tot het aanbrengen van stellages en statieven, die in dit geval aanzienlijke afmetingen zouden moeten hebben.

Vooreerst werd nagegaan of de klok behoorlijk verticaal hing. (De klok B bijvoorbeeld hing in haar ruststand zichbaar schuin.) Daartoe werd de klepel met behulp van een stevig touw een flink eind zijwaarts getrokken en in dezen stand gehouden. In het midden van den haak A (fig. 2) waaraan de klepel-

riem bevestigd is, werd vervolgens een dun koord vastgemaakt en verticaal gespannen. Eene dunne, lichte meetlat werd nu met het eene uiteinde tegen het verticale koord gehouden, terwijl haar andere uiteinde door een helper langs den onderrand der klok werd rondgedraaid. Als dezelfde merkstreep bij deze beweging steeds op den rand bleef, hing de klok natuurlijk verticaal. Was de stand niet goed, dan kon hij gemakkelijk geleidelijk veranderd worden met behulp van de touwen, waarmee de klok geluid wordt.

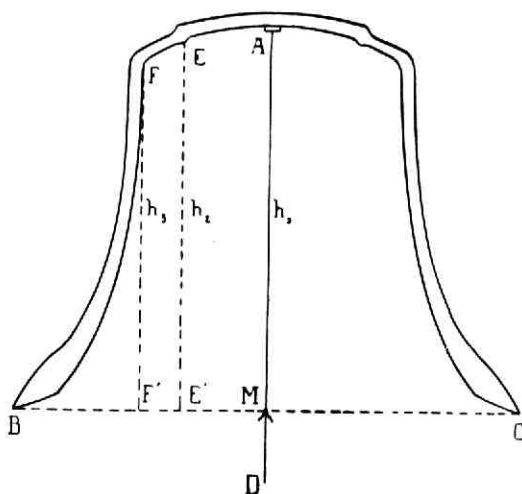


Fig. 2.

Nadat de verticale stand van de as der klok verzekerd was, werd de plaats van het middelpunt M der opening bepaald, door eenvoudig eene lat, die langer was dan de middellijn, zoo tegen den rand te houden, dat zij het koord AD , (dat strak gespannen werd gehouden door een

haakje in den grond) aanraakte. Het punt M werd gemerkt met een eindje dun touw, dat om AD stevig werd vastgeknoopt. De binnenruimte der klok werd nu verlicht met eene lantaarn. De inwendige hoogte AM , die we in het vervolg steeds door h_1 zullen aanwijzen, kon nu terstond bepaald worden met eene meetlat.

Om vervolgens den inwendigen diameter op verschillende hoogten te bepalen, maakte ik gebruik van

eene soort van passer (fig. 3) bestaande uit twee eikenhouten linialen OP en OQ, die met eene schroef en vleugelmoer bij O moeielijk draaibaar konden gemaakt worden. De beenen van dezen passer waren 1.50 Meter lang. Bij P was een dun touw vastgemaakt, dat bij Q over eene kleine inkeeping naar O liep en daar met de hand kon aangetrokken worden. De passer werd op eene willekeurige opening gesteld en het punt O zoover langs AM opgeschoven, dat de punten P en Q den wand der klok aanraakten (fig. 4). Om nu inderdaad eene middellijn te meten, was het, zooals men ziet, noodig en voldoende, dat PQ het koord AM juist aanraakte in een punt C.

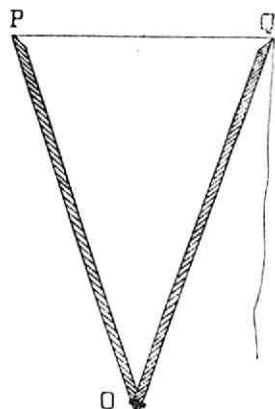


Fig. 3.

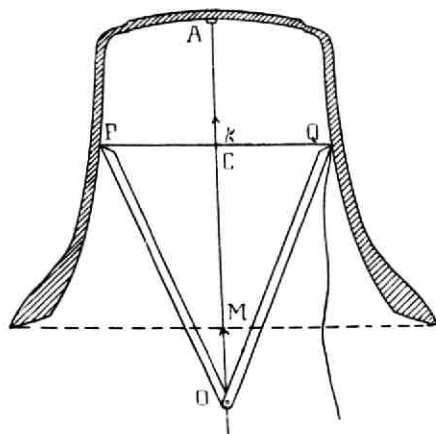


Fig. 4.

De hoogte MC van dezen diameter boven het punt M werd vastgesteld met behulp van een stukje dun touw, dat om AM geknoopt en daarlangs gemakkelijk verschuifbaar was (in de figuur aangeduid door K). Nadat dit koordje tot C verschoven was, werd de schroef bij O vastgezet, het koord PQ gestrekt en de passer uit de klok verwijderd.

Daarna werd de lengte van PQ en CM gemeten.

De bodem vertoonde bij alle drie klokken eene dub-

bele welving. Deze werd voor mijn doel voldoende nauwkeurig bepaald door de hoogte van de punten E en F (fig. 2) boven BC. Deze bepaling geschiedde met een schietlood en eene liniaal, die dit en twee punten van den onderrand der klok aanraakte. De hoogte der punten E en F boven BC noemen wij h_2 en h_3 .

Op deze wijze werden de volgende getallen gevonden :

<i>B</i>		<i>dis</i>		<i>fis I</i>	
Hoogte boven M.	Inw. Diam.	Hoogte boven M.	Inw. Diam.	Hoogte boven M.	Inw. Diam.
7,1 cM.	136,5 cM.	3,8 cM.	107,7 cM.	4,7 cM.	86,7 cM.
12,7 "	127,6 "	6,4 "	103,5 "	8,8 "	82,8 "
20,0 "	119,3 "	14,3 "	94,3 "	14,0 "	77,2 "
26,2 "	113,2 "	19,1 "	89,5 "	20,0 "	71,7 "
34,8 "	107,1 "	28,3 "	82,0 "	29,8 "	65,7 "
40,4 "	102,8 "	39,6 "	76,0 "	44,0 "	60,2 "
47,3 "	100,0 "	54,0 "	70,7 "	54,6 "	57,3 "
60,7 "	94,5 "	64,4 "	68,4 "	74,0 "	56,5 "
69,3 "	92,6 "	88,9 "	67,5 "	82,0 "	39,8 "
81,8 "	89,0 "	96,8 "	44,3 "	—	—
91,0 "	88,2 "	—	—	—	—
117,1 "	86,1 "	—	—	—	—
122,0 "	44,1 "	—	—	—	—

$$\begin{array}{lll}
 h_1 = 124,3 \text{ cM.} & || & h_1 = 100,5 \text{ cM.} \\
 h_2 = 122,0 \text{ " } & || & h_2 = 96,8 \text{ " } \\
 h_3 = 117,1 \text{ " } & || & h_3 = 88,9 \text{ " }
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{lll}
 h_1 = 84,2 \text{ cM.} \\
 h_2 = 82,0 \text{ " } \\
 h_3 = 74,0 \text{ " }
 \end{array}$$

Uit deze getallen zijn de inwendige profielen der klokken geconstrueerd in de figuren 5, 6 en 7. In dezelfde figuren zijn meteen de uitwendige doorsneden geteekend met behulp van de getallen in de tabel op blz. 18 vermeld. Teneinde grootere zekerheid te hebben omtrent den vorm van de bogen m en q , die nogal uitgestrekt zijn, heb ik voor deze drie figuren later eenige afzonderlijke diameters met de daarbij behoorende

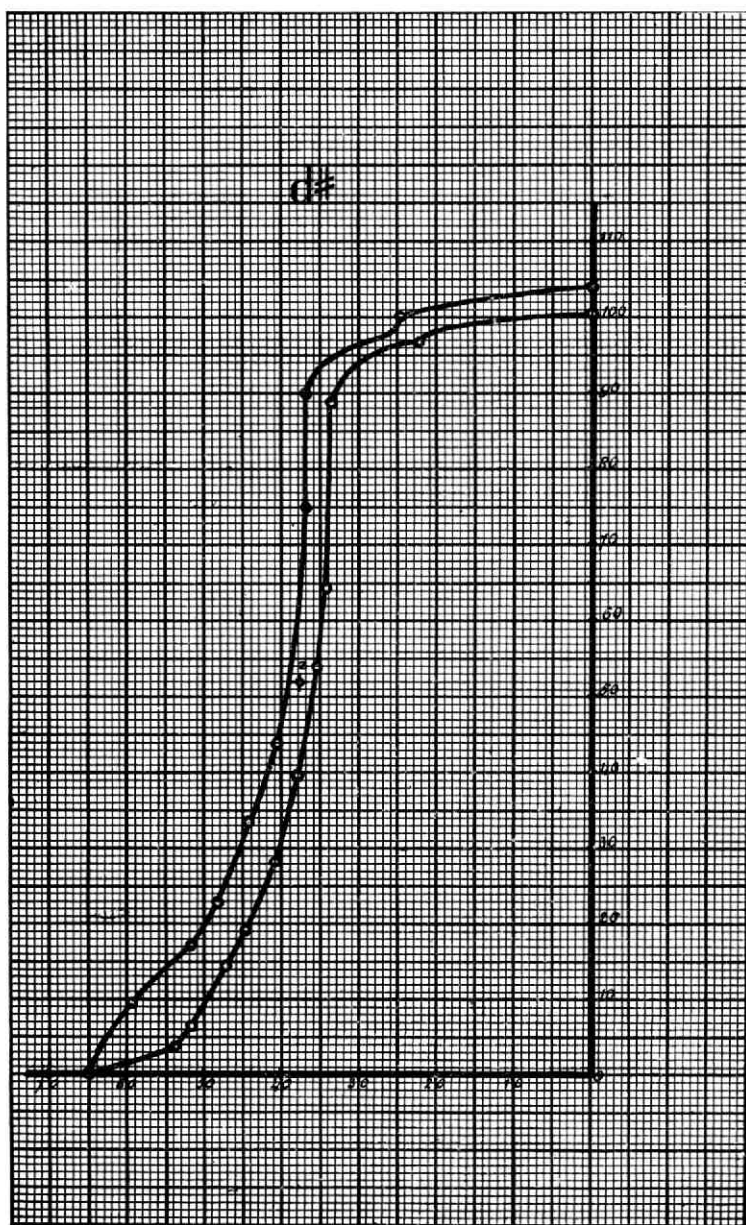


Fig. 6.

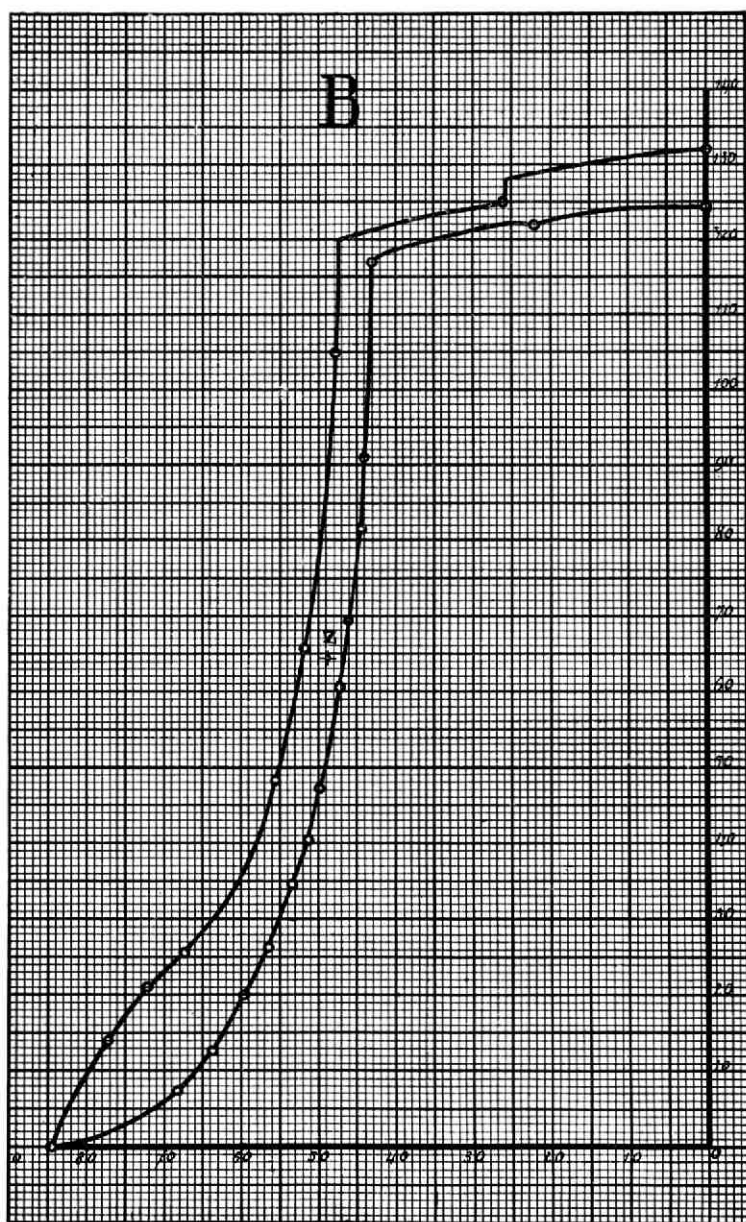


Fig. 5.

hoogten bepaald. De meting geschiedde (in den toren vrij lastig) op de volgende wijze. Tusschen de hengsels der klok werd eene horizontale lat SS gestoken (fig. 4) en zoo goed mogelijk naar het middelpunt van den bodem gericht. De ophangwijze maakte het namelijk onmogelijk, het uiteinde van de lat tot het middelpunt op te schuiven. Langs de lat waren twee schietlooden p en q verschuifbaar. Van het laatste kon de lengte veranderd worden. p werd nu eerst in een zoodanig punt P der lat bevestigd, dat het koord den onderrand der klok juist aanraakte. Vervolgens werd q , na op eene willekeurige lengte te zijn gebracht, zoo lang langs de lat verschoven, totdat het kogeltje L de klok juist aanraakte. Door P Q en Q L uit te meten vond ik den diameter voor het punt L = d_1 — 2 P Q op de hoogte h — Q L. Op deze wijze kreeg ik nog de volgende getallen:

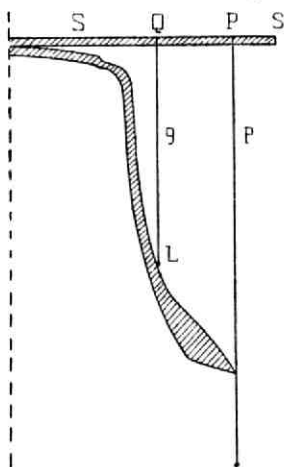


Fig. 4.

<i>B</i>		<i>dis</i>		<i>fis I</i>	
Hoogte boven M.	Uitw. Diam.	Hoogte boven M.	Uitw. Diam.	Hoogte boven M.	Uitw. Diam.
13,9 cM.	154,4 cM.	9,5 cM.	118,6 cM.	7,7 cM.	100,2 cM.
48,2 "	111,2 "	33,4 "	89,0 "	25,8 "	73,4 "
65,8 "	104,0 "	44,0 "	81,2 "	40,2 "	67,2 "

Uit de drie doorsneden, geteekend in fig. 5, 6 en 7, (het behoeft zeker geen betoog, dat de doorsnede van den bodem slechts bij ruwe benadering kan weer-

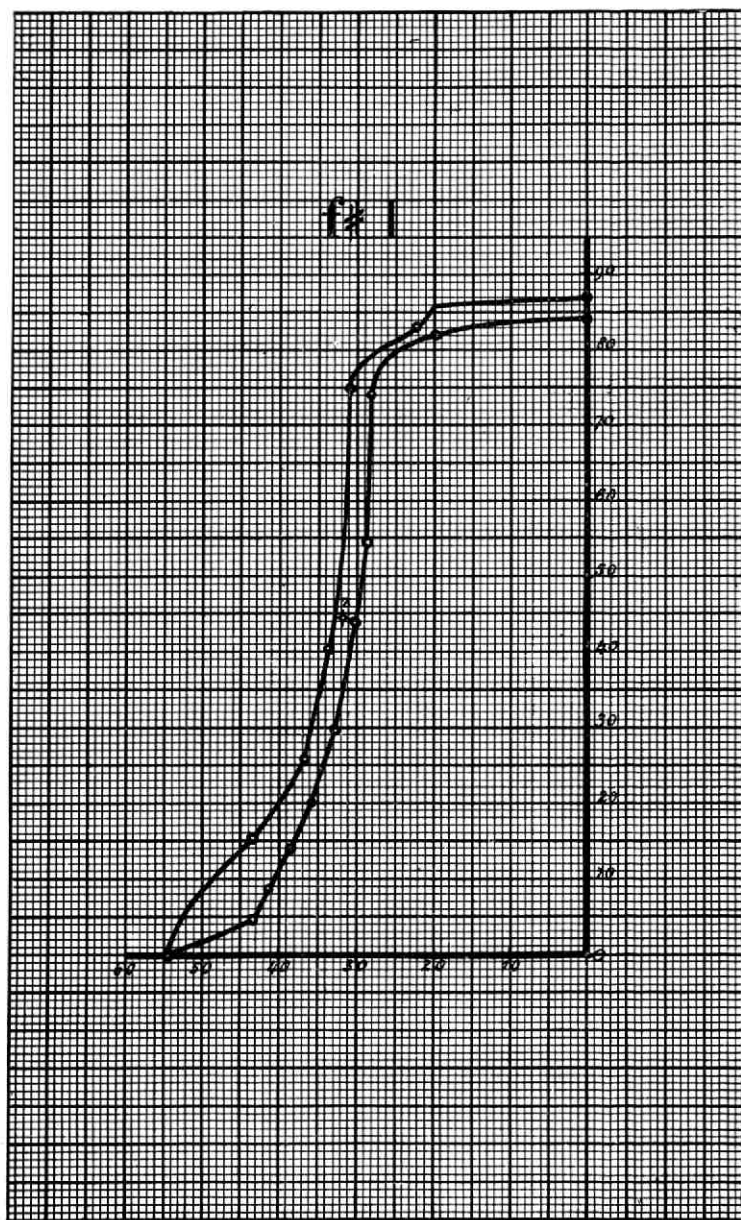


Fig. 7.

gegeven worden) kunnen nu verdere gevolgtrekkingen gemaakt worden, wat betreft de gelijkvormigheid. Deelt men de hoogte in elke doorsnede in bijv. 10 gelijke deelen en leest men in de figuren de bij de deelpunten behorende uitwendige stralen af, (daarbij tiendedeelen schattende)¹⁾ dan vindt men voor de klokken *B* en *dis*:

Deelen v/d. hoogte.	Uitw. stralen.		Verhou- ding.	Deelen v/d. hoogte.	Uitw. stralen.		Verhou- ding.
	<i>B</i>	<i>dis</i>			<i>B</i>	<i>dis</i>	
0,0	84,5 cM.	65,0 cM	1,35	0,5	51,7 cM.	38,9 cM.	1,33
0,1	77,6 "	58,0 "	1,34	0,6	50,2 "	38,0 "	1,32
0,2	67,0 "	49,5 "	1,35	0,7	48,8 "	37,2 "	1,31
0,3	58,5 "	44,6 "	1,31	0,8	48,0 "	37,0 "	1,30
0,4	54,4 "	41,5 "	1,31	0,9	47,6 "	34,7 "	1,37

Doet men hetzelfde voor de inwendige stralen, dan komt er :

Deelen v/d. hoogte.	Inw. stralen.		Verhou- ding.	Deelen v/d. hoogte.	Inw. stralen.		Verhou- ding.
	<i>B</i>	<i>dis</i>			<i>B</i>	<i>dis</i>	
0,0	84,5 cM.	65,0 cM.	1,30	0,5	46,6 cM.	35,4 cM.	1,32
0,1	64,7 "	49,6 "	1,28	0,6	44,8 "	34,3 "	1,31
0,2	56,5 "	44,0 "	1,31	0,7	44,0 "	34,0 "	1,29
0,3	52,0 "	39,8 "	1,30	0,8	43,6 "	33,8 "	1,29
0,4	48,6 "	37,3 "	1,32	0,9	40,0 "	30,5 "	1,31

Uit de verhoudingsgetallen blijkt wel, dat eene zekere overeenkomst in vorm van beide klokken niet te ontkennen valt. De schommelingen tusschen 1,28 en 1,37

¹⁾ De oorspronkelijke teekeningen waren gemaakt op schaal $\frac{1}{5}$ op papier dat verdeeld was in vierkantjes van 2 mM., zoodat 5^{de} deelen van mM. geschat moesten worden.

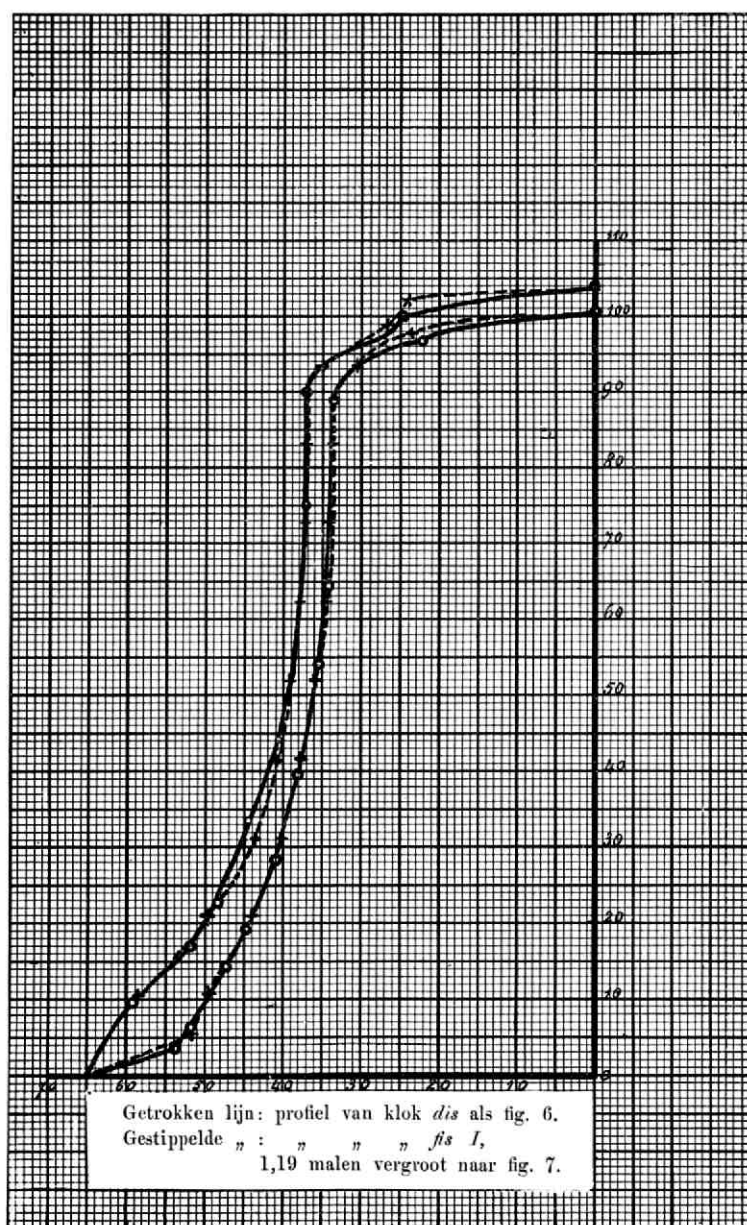


Fig. 7a.

maken het echter bezwaarlijk om van gelijkvormigheid te spreken. *Dat HEMONY de klok dis derhalve naar andere maten moet ontworpen hebben dan MOER en gebrs. JASPERS de klok B, is buiten twijfel.*

Vergelijken wij thans echter de beide klokken van HEMONY op dezelfde wijze met elkander:

Deelen v/d. hoogte.	Uitw. stralen.		Verhou- ding.	Deelen v/d. hoogte.	Inw. stralen.		Verhou- ding.
	<i>dis</i>	<i>fis I</i>			<i>dis</i>	<i>fis I</i>	
0,0	65,0 cM.	54,5 cM.	1,19	0,0	65,0 cM.	54,5 cM.	1,19
0,1	58,0 "	49,3 "	1,19	0,1	49,6 "	41,5 "	1,19
0,2	49,5 "	41,6 "	1,19	0,2	44,0 "	37,0 "	1,19
0,3	44,6 "	36,5 "	1,22	0,3	39,8 "	33,7 "	1,18
0,4	41,5 "	34,3 "	1,21	0,4	37,3 "	31,6 "	1,18
0,5	38,9 "	32,8 "	1,19	0,5	35,4 "	30,2 "	1,17
0,6	38,0 "	31,9 "	1,19	0,6	34,3 "	29,1 "	1,18
0,7	37,2 "	31,3 "	1,19	0,7	34,0 "	28,5 "	1,19
0,8	37,0 "	31,0 "	1,20	0,8	33,8 "	28,3 "	1,19
0,9	34,7 "	29,5 "	1,18	0,9	30,5 "	25,7 "	1,19

Men ziet, dat hier de overeenstemming der verhoudingsgetallen veel beter is dan in het voorgaande geval en dat ze bijna alle schommelen om 1,19. Ter verduidelijking diene fig. 7a, waarin behalve klok *dis* van fig. 6 ook *fis I* is geteekend, nadat alle afmetingen uit fig. 7 met 1,19 vermenigvuldigd zijn.

Fouten, voortgekomen uit mijne methode van meten en misschien ook tijdens het gieten ontstaan, daar gelaten, mogen we hier zonder twijfel spreken van eene *gelijkvormigheid*, zoowel wat het in- als het uitwendig profiel der klokken *dis* en *fis I* aangaat, die door HEMONY volkomen als zoodanig bedoeld en met groote nauwkeurigheid ook bereikt is.

In verband met hetgeen reeds is medegedeeld aangaande de uitwendige afmetingen van alle overige door mij onderzochte klokken, laat het zich ver-

wachten, dat een nader onderzoek harer inwendige doorsnede tot de conclusie zal leiden, *dat HEMONY aan al zijne klokken EENZELFDE profiel heeft gegeven.*

Wij zullen de gevonden resultaten aan de theorie toetsen. Lord RAYLEIGH zegt¹⁾: „If there is anything well established in theoretical acoustics, it is that the frequencies of vibration of similar bodies formed of similar (lees: the same) material are inversely as the linear dimensions — a law, which extends to *all* the possible modes of vibration.”

De algemeene wet, waarop zooeven gedoeld werd, kan men speciaal voor klokken aantoonen uit vrij ingewikkelde berekeningen,²⁾ maar ook uit het *beginsel der dynamische gelijkvormigheid*, dat algemeen geldig is voor gelijkvormige lichamen en dat berust op de toepassing der dimensieformules.³⁾ Denken we ons n.l. twee isotrope, gelijkvormige vaste lichamen van hetzelfde materiaal vervaardigd. Voor zoover wij weten, hangt de trillingstijd van elk dier lichamen af van de volgende grootheden:

- 1°. den vorm;
- 2°. ééne der lineaire afmetingen, die wij voorstellen door c ;
- 3°. de dichtheid, ρ ;
- 4°. den elasticiteits modulus E ;⁴⁾
- 5°. een coefficient μ , die de verhouding aangeeft tusschen de vermindering in diameter van eene cilindrische staaf en de uitrekking, waarvan deze vermindering het gevolg is.⁵⁾

1) Phil. Mag. 29. 1890, p. 12.

2) Zie bijv. MATHIEU, Journ. del'Ecole Polytechnique, 51^{me} Cah. p. 177.

3) RAYLEIGH, Theory of Sound, 2nd ed. I 54, II 429.

4) RAYLEIGH spreekt van „Young's modulus”, q ; l. c. I § 149.

5) L. c. § 157.

Stellen wij nu, dat de dimensie van den trillingstijd wordt voorgesteld door

$$\tau = c^x \cdot \rho^y \cdot E^z \dots \dots \dots (1)$$

en voeren we de fundamentele eenheden in, dan krijgen we:

$$\begin{aligned} c &= [L] \\ \rho &= [M] [L]^{-3} \\ E &= [M] [L]^{-1} [T]^{-2} \end{aligned}$$

Dit laatste volgt o. a. uit de formule voor de uitrekking van eene cylindrische staaf: $\lambda = \frac{1}{E} \cdot \frac{LP}{D}$, waarin L de lengte, D de doorsnede en P de uittrekkende kracht is; derhalve is $E = \frac{LP}{\lambda D}$, dus van de dimensie $\frac{\text{kracht}}{\text{oppervlak}} = [M] [L]^{-1} [T]^{-2}$.

Substitueeren we de dimensies van τ , c , ρ en E in (1) dan komt er:

$$[T] = [L]^{x-3y-z} \cdot [T]^{-2z} \cdot [M]^{y+z}.$$

Hieruit volgt, daar de exponenten van $[T]$, $[L]$ en $[M]$ in beide leden gelijk moeten zijn:

$$-2z = 1 \quad x - 3y - z = 0 \quad y + z = 0$$

$$\text{Derhalve:} \quad x = 1 \quad y = \frac{1}{2} \quad z = -\frac{1}{2}$$

$$\text{dus:} \quad \tau = c \cdot \rho^{\frac{1}{2}} \cdot E^{-\frac{1}{2}}.$$

Daar nu voor beide lichamen ρ en E dezelfde ondersteld zijn, is τ recht evenredig met c , q. e. d.

Nu blijft evenwel nog de vraag te beantwoorden, of dezelfde elastische krachten, die de trillingen in het eerste lichaam teweeg brengen, ook in het tweede de vereischte beweging zullen veroorzaken. Onderstellen wij, dat de lineaire afmetingen der lichamen zich verhouden als $1 : n$ en dat de amplitudines der overeenkomstige punten, alsmede de tijden waarin zij doorloopen worden, zich evenzeer verhouden als $1 : n$. (De beide bewegingswijzen zijn dan *gelijkvormig* te noemen). Van twee overeenkomstige massadeeltjes m en m' verhouden zich de massa's als $1 : n^3$ en daar de uitwijkingen op *eenzelfde* oogenblik zich verhouden als $1 : \frac{1}{n}$ en dit ook geldt voor de versnelingen p en p' , zullen de krachten, die op de beide deeltjes werken zich verhouden als $mp : m'p'$ dus als $1 : n^2$. Maar als de beide bewegingen werden veroorzaakt door *elastische* krachten, dan zouden ook deze zich verhouden als $1 : n^2$ omdat zij moeten evenredig zijn met de oppervlakten waarop zij werken. Dus omgekeerd, *als* de beweging van het eerste lichaam veroorzaakt kan worden door *elastische* krachten, dan zullen diezelfde elastische krachten voor de gelijkvormige beweging van het tweede lichaam voldoende zijn.

Onder den invloed van elastische krachten kunnen gelijkvormige lichamen van dezelfde stof dus gelijkvormige bewegingen uitvoeren.

Wij willen de geldigheid van het theorema der dynamische gelijkvormigheid verifieeren aan een tweetal voorbeelden. De trillingstijd van eene snaar wordt voorgesteld door de formule

$$\tau = \frac{2l}{s} \sqrt{\frac{\rho}{P}}$$

waarin l de lengte is, ρ het gewicht van de lengteenheid der snaar, P de spanning en s het aantal

deelen, waarin de snaar zich verdeelt. Hebben we nu twee snaren, waarvoor ρ , P en s gelijk zijn, dan verhouden zich de trillingstijden als de lengten.

De trillingstijd van een cirkelvormigen ring met cirkelvormige doorsnede, als de trillingen in het vlak van den ring plaats hebben, wordt uitgedrukt door

$$\tau = \frac{4 \pi a^2}{c s (s^2 - 1)} \sqrt{\frac{\rho (s^2 + 1)}{q}} \quad ^1)$$

waarin a den straal der doorsnede voorstelt, c den straal van de (cirkelvormige) as van den ring, ρ de dichtheid, q den elasticiteitsmodulus en s het aantal deelen, waarin de ring zich verdeelt. Nemen we nu ringen, waarvoor ρ , q en s gelijk zijn, dan is $\frac{a}{c}$ standvastig, dus zijn de periodes evenredig met a , d. i. met ééne der lineaire afmetingen.

Keeren wij thans terug tot de beschouwing der drie onderzochte klokken.

In hoeverre stemmen de uitkomsten van het onderzoek overeen met het bovengenoemde principe? De klokken *B* en *dis* vertoonen overeenkomst van vorm, maar zijn niet gelijkvormig te noemen. De verhouding der overeenkomstige afmetingen schommelt tusschen 1,28 en 1,37. De verhouding der trillingstijden is (vgl. tabel op blz. 18) 1,26. Van dynamische gelijkvormigheid is hier dus weinig te bespeuren.

Hoe echter staat het met de klokken *dis* en *fis I*, die beide van denzelfden maker zijn? De verhouding der overeenkomstige afmetingen is bijna overal 1,19, terwijl, zooals we in hoofdstuk III zullen zien het materiaal, waaruit beide vervaardigd zijn, hetzelfde is.

¹⁾ HOPPE, Crelle Bd. 63, 158, 1871.

De verhouding der trillingstijden is nu evenzeer 1,19. (Zie tabel blz. 18).

Zoo leveren deze beide klokken eene experimenteele bevestiging van het principe der dynamische gelijkvormigheid; op grond van het voorgaande is het zoo goed als zeker, dat ook de overige klokken van HEMONY dit zullen doen.

Het gelijkvormigheidsbeginsel eischt, dat niet alleen de trillingstijden der grondtonen, maar ook van alle 1^{ste} boventonen, alle 2^{de} boventonen enz. zich gelijk verhouden. Dat wil zeggen: Elke klok moet met betrekking tot haren grondtoon *dezelfde* reeks van boventonen geven; het klankgehalte of timbre moet van alle volmaakt hetzelfde zijn. Natuurlijk geldt dit laatste slechts in de onderstelling, dat alle klokken op dezelfde wijze worden aangeslagen, zoodat ook de intensiteiten van alle gelijkwaardige boventonen tot de intensiteit van den grondtoon dezelfde verhouding hebben.

Is dan verder de klank van de eene klok welluidend, dan zal hetzelfde gelden voor alle andere. En de allerlaatste vraag, die hier dan ter sprake zou komen, is: welken vorm moet eene klok hebben en uit welk materiaal moet zij vervaardigd worden, om haar dien klank te geven?

In hoofdstuk V zal blijken, dat HEMONY's klokken inderdaad ook aan de zooveen genoemde „toongelijkvormigheid” voldoen. Niet zonder verbazing zal men daarom lezen, dat HEMONY niets geweten zou hebben van de juiste verhoudingen, die noodig zijn om een bepaalden toon te verkrijgen.¹⁾ HARZER grondt dit zijn bezwaar op het feit, dat eene klok van HEMONY te Darmstadt veel te kort en haar wand veel te dik

¹⁾ HARZER, Die Glockengießerei mit ihren Nebenarbeiten, Weimar 1854, blz. 71. Dit werk werd welwillend door den heer J. W. ENSCHÉDÉ te Amsterdam in bruikleen gegeven.

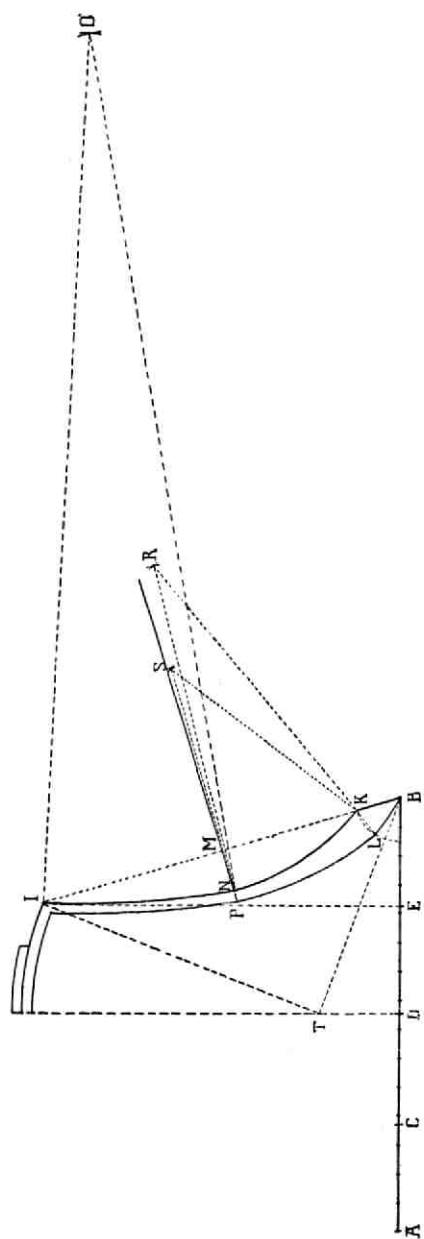


Fig. 9.

is, d. w. z. te kort en te dik met betrekking tot een profiel, dat HARZER aangeeft en dat volgens hem door de meest bekende klokkengieters algemeen gebruikt werd.¹⁾ De constructie van dit profiel worde hier in het kort vermeld. Het bestaat uitsluitend uit cirkelbogen en rechte lijnen. Eenige theoretische grond voor de constructie wordt niet aangevoerd en zal ook wel bezwaarlijk te vinden zijn. Veel meer krijgt men bij het nagaan der afmetingen den indruk van eene zekere willekeur en van het streven naar een sierlijken vorm. In elk geval is niet in te zien, waarom juist dit profiel aan eene klok den besten klank zou geven.

De fundamentele afmeting voor de klok is de diameter van hare opening, dien wij thans d willen noemen en in fig. 9 wordt aangegeven door de lijn A B.

Vooreerst verdeelt men A B door de punten C, D en E in 4 gelijke deelen en richt in die punten loodlijnen op A B op. C E wordt dan de uitwendige diameter bovenaan. Op de loodlijn in E nemen we een punt I, zoodanig, dat $E I = 12$ slagen (onder een

slag verstaat men $\frac{1}{15} d$), trekken B I en plaatsen in het midden M daarvan eene loodlijn $M N = 1\frac{1}{2}$ slag. Op B I zetten we een stuk $B K = 1\frac{1}{2}$ slag uit en beschrijven daarmee uit B als middelpunt een cirkelboog, waarin we eene koorde $K L = 1$ slag uitzetten en trekken B L. Uit I en N beschrijven we cirkelbogen met stralen $= 2 d$, die elkaar in een punt O snijden. Uit O wordt de cirkelboog I N beschreven.

We verlengen M N met een stuk $N P = \frac{1}{3}$ slag en beschrijven uit O een boog met straal O P. Voorts worden uit P en L bogen met straal $= 12$ slagen beschreven en uit het snijpunt R daarvan als mid-

¹⁾ L. c. 33.

delpunt de boog P L. Uit N en K trekt men cirkelbogen met straal = 8 slagen, die elkaar snijden in een punt S. Uit S als middelpunt trekt men nu boog N K. Vervolgens trekt men uit A en B bogen met straal = 8 slagen; zij snijden elkaar in T. Uit T trekt men met T I als straal een cirkelboog en ook een met T I — $\frac{1}{3}$ slag als straal. In het midden wordt de bodem door een concentrischen boog verdikt met $\frac{1}{3}$ slag.

Bij deze constructie merkt HARZER op, dat de scherpe kanten bij I, K en L vaak ontbreken.

Natuurlijk wordt de linkerhelft van het profiel op dezelfde wijze verkregen als de rechter.

Wanneer men nu eens het profiel van de klok *fig. 1* vergelijkt met dat, hetwelk zij volgens HARZER hebben moest,¹⁾ dan ziet men, dat ook deze klok „te kort en te dikwandig” is. Alles wat we hieruit mogen afleiden, is dat HEMONY zich niet aan het genoemde profiel stoorde, daar het te verwachten is dat al zijne klokken dezelfde afwijkingen van dit profiel zullen vertoonen. Voorts deelt HARZER mede,²⁾ dat alle klokken van het groothertogelijk slot te Darmstadt, gegoten door HEMONY, van binnen afgedraaid zijn, voornamelijk langs boog *k* en dat daarom alle klokken na het gieten hooger van toon moeten zijn geweest, dan behoorde. Dit is volkomen juist; HEMONY zegt zelf in een brief aan KIRCHER te Rome, d.d. Zutfen 26 Febr. 1653:³⁾

„Daar het onmogelijk is, eene klok bij het gieten de goede afmetingen te geven, draai ik ze na het

1) Zie fig. 22.

2) L. c. 72.

3) P. Gasparis Schotti Magiae Universalis Naturae et Artis, II, lib. VI p. 357.

gieten uit." Nadere bijzonderheden over dit uitdraaien vindt men bij BOECKELER.¹⁾ (De figuren 6 en 7 doen vermoeden, dat dit inderdaad bij boog *k* gebeurd is) Die onmogelijkheid is zonder meer duidelijk, althans verklaarbaar; vooreerst toch zal de zware metaal-massa een aanzienlijken druk op de wanden van den gietvorm uitoefenen en de wanddikte dus te groot worden; bovendien is het te verwachten, dat het oppervlak van het gietsel vol van oneffenheden is. Van het grootste gewicht is hier echter wel de uitspraak van HEMONY, dat het niet mogelijk is, eene klok door afdraaien op de behoorlijke stemming te brengen, „als zij niet... of niet de behoorlijke verhouding van afmetingen heeft."

Wat ten slotte de opzettelijke bedoeling van HEMONY aangaat, al zijne klokken gelijkvormig te maken, deze onderstelling vindt steun in de volgende zinsnede, welke evenzeer ontleend is aan voornoemden brief: „*Wat betreft de onderlinge verhouding der klokken, deze is dezelfde als bij andere muziekinstrumenten, want het octaaf is in verhouding van 2 tot 1, de quint van 3 tot 2, de quart van 4 tot 3, de groote terts van 5 tot 4 enz.*"

Blijkt uit de constructie van HARZER eenerzijds, dat hij het noodzakelijk acht, alle klokken gelijkvormig te maken, andererseits blijkt uit de hiervoor vermelde metingen zoowel als uit HEMONY's eigen woorden ten duidelijkste, dat hij zelf van die noodzakelijkheid doordrongen was en dat HARZER's meening omtrent HEMONY allen grond mist.

In de litteratuur, op dit onderwerp betrekking hebbende, heb ik niet kunnen vinden, hoe HEMONY zijne

¹⁾ Beiträge zur Glockenkunde, Aachen, 1882 p. 64.

profielen construeerde. Slechts eene korte — maar zonder twijfel belangrijke — aanwijzing vinden wij in den meergenoemden brief, op welken Prof. ZEEMAN door den heer ENSCHEDÉ opmerkzaam gemaakt werd. De beroemde klokkengieter zegt n.l. : „Als de breedte 15 is, is oudergewoonte de hoogte 12. Ook kan men nemen de breedte 14 en de hoogte 11.” Wanneer we de tabel op blz. 18 nagaan, dan zien we inderdaad, dat de verhouding van d_1 en h niet veel van $\frac{15}{12}$ of 1,25 verschilt.

<i>dis</i>	1,250	<i>a</i>	1,258	<i>cis'</i>	1,237
<i>fis I</i>	1,253	<i>ais</i>	1,240	<i>d'</i>	1,244
<i>fis II</i>	1,283	<i>b</i>	1,250	<i>dis'</i>	1,231
<i>g</i>	1,254	<i>c'</i>	1,30	<i>e'</i>	1,254
<i>gis</i>	1,253				

Zonder twijfel komen de afwijkingen, gedeeltelijk althans, op rekening van meetfouten. De hoogte toch kon, gelijk reeds vroeger medegedeeld is, niet nauwkeurig bepaald worden, als het middelpunt van den bodem der klok niet toegankelijk was wegens de haken waaraan zij opgehangen was. De klok *B* geeft eene verhouding, die aanzienlijk kleiner is, dan de bovenstaande, n.l. 1,208. Zij is dus in vergelijking met HEMONY's klokken, te kort.

HOOFDSTUK III.

Samenstelling van het klokkemetaal.

In het vorige hoofdstuk is ondersteld, dat de onderzochte klokken van hetzelfde materiaal vervaardigd waren, d. w. z. van materiaal met dezelfde dichtheid en dezelfde elasticiteitscoëfficiënten. Deze grootheden hangen in de eerste plaats af van de chemische samenstelling. Het was dus wenschelijk, deze te onderzoeken. De hierna te vermelden analyses ben ik aan Dr. EUWES verschuldigd.

Een klein gedeelte van het oppervlak der klokken *B*, *dis* en *fis* *I*, dat overal sterk geoxydeerd was, werd blank geschuurd en van het zuivere metaal, dat bij *B* een zwak gelen, bij *dis* en *fis* *I* een goudachtigen glans vertoonde, met eene vijl eene kleine hoeveelheid afgenomen (0,5 à 1 gram). Daar het metaal vrij hard was, werd in het vijlsel ijzer, van de vijl afkomstig, verwacht. Inderdaad werd met eene sterke magneetstaaf eene niet onaanzienlijke hoeveelheid ijzer-vijlsel al dadelijk verwijderd. Het metaal werd onder verwarming aan de inwerking van verdund salpeterzuur blootgesteld, waarbij het koper in oplossing ging als $\text{Cu}(\text{NO}_3)_2$, het tin als een wit neerslag van metatinzuur SnO_2 bezonk. De vloeistof werd gefiltreerd; uit het filtraat werd het koper als CuS neergeslagen met zwavelwaterstof. Dit CuS werd gedroogd en in een waterstofstroom met eene overmaat van zwavel gegloeid, waarbij het overging in

Cu_2S , (dat aan de lucht bestendig is in tegenstelling met CuS). Het Cu_2S werd gewogen en uit het gewicht werd het koper bepaald. Het SnO_2 werd op het aschvrije filter gedroogd, het filter verbrand en het SnO_2 , dat achterbleef, gewogen. Hieruit werd het tingehalte berekend. De kleine hoeveelheid ijzer, die in het eerste filtraat in oplossing was achtergebleven, werd ten slotte neergeslagen als Fe_2O_3 , dat gewogen werd.

Op deze wijze werd gevonden:

<i>B</i>	81,5 % koper.	17,8 % tin.	0,02 % ijzer.	99,32 %
<i>dis</i>	79,3 % „	20,6 % „	0,01 % „	99,91 %
<i>fis I</i>	78,0 % „	21,7 % „	0,04 % „	99,74 %

Uit de som der procentgehalten blijkt, dat behalve koper en tin geene andere metalen als essentiele componenten van het metaalmengsel aanwezig waren.

Men ziet hieruit, dat de quantitatieve samenstellingen van de beide door HEMONY gegoten klokken een niet onbelangrijk verschil vertoonen, maar dat de klok *B* toch nog meer met elk van beide verschilt. Het kleine ijzergehalte is waarschijnlijk alleen op rekening van het afvijen te stellen. Het alliage bestond dus voor alle drie klokken uitsluitend uit koper en tin.

Het is bekend, dat het klankgehalte van eene klok oudtijds vooral als afhankelijk van de chemische samenstelling werd beschouwd en dat de klokken-gieters aan de naar hunne meening juiste verhouding groot gewicht hechtten. Bevreemdend is het daarom zeker, dat de beide gietsels van HEMONY niet eene betere overeenkomst vertoonen. Men mag echter niet vergeten, dat men in een metaalmengsel van duizenden kilogrammen moeielijk homogeniteit kan brengen. Wellicht zou het metaalvijsel, op andere plaatsen aan de klokken ontnomen, eene andere samenstelling

blijken te hebben. Om hieromtrent voldoende zekerheid te hebben, zou men echter de klokken op verscheidene plaatsen moeten beschadigen.

Van de overige klokken heb ik geen metaalvijsel kunnen verzamelen. De luchtstroomingen waren in het open gedeelte van den toren zoo sterk, dat het neervallende vijsel ondanks de genomen voorzorgen grootendeels verstoof, zoodat er lang gevijld moest worden, voordat er eenige korrels opgevangen waren. Om de klokken niet te beschadigen moest ik van deze analyses afzien.

In welke mate het gevonden verschil in samenstelling van invloed is op het soortelijk gewicht van het metaalmengsel is moeielijk na te gaan, daar de desbetreffende tabellen zeer onvolledig zijn ¹⁾. Hoogstwaarschijnlijk is deze invloed gering, daar bij een verschil van 11,2 % koper volgens RICHE het spec. gewicht met 0,04 verandert. Eindelijk is de vraag of hardheid en de daarmee samenhangende elasticiteitsmodulus door het verschil in samenstelling noemenswaard gewijzigd worden. Ook dit is niet uit te maken. Bovendien kan bij gelijkheid in chemische samenstelling nog zeer goed verschil in hardheid en elasticiteit bestaan. De hardheid zal wel, zooals RAYLEIGH opmerkt ²⁾ in sterke mate van de wijze van afkoelen van het gietsel afhankelijk zijn. Volgens HARZER wordt de legering bij snelle afkoeling zeer veel weeker en pletbaarder.

De uitkomsten, die in hoofdstuk V zullen worden medegedeeld, doen echter zien, dat er noch in de dichtheid, noch in de elasticiteit verschillen van praktische beteekenis bestaan.

¹⁾ Zie bijv. de tabellen van LANDOLT en BÖRNSTEIN, 1894.

²⁾ Phil. Mag. 29, 1890. p. 12.

HOOFDSTUK IV.

Bepaling van het gewicht der klokken *B*, *dis* en *fis I*.

Behalve om het onderzoek van deze drie klokken zoo volledig mogelijk te doen zijn, was de bepaling van haar gewicht ook nog om eene andere reden wenschelijk. Er bestaat n.l. eene empirische formule, die het gewicht eener klok bij benadering leert uitdrukken met behulp van haar diameter. De zoo langs twee verschillende wegen gevondene gewichten moeten dan overeenstemmen.

Om het gewicht te leeren kennen deed ik eene volumenbepaling en eene soortelijk gewichtsbepaling.

A. *Volumenbepaling.*

De doorsnede eener klok (fig. 5, 6 en 7) werd op een stuk doorschijnend millimeterpapier overgetrokken en dit stuk in zijn geheel op een vel zeer zwaar bladtin met schellakoplossing bevestigd. Na droging kon het profiel gemakkelijk uitgeknipt worden. Wegens de dikte van het bladtin kon de uitgesneden strook, eenmaal vlak zijnde, goed vlak gehouden worden. Dit laatste was noodig ter bepaling van het zwaartepunt, dat in de drie figuren door *Z*'s aangeduid. Daartoe werd een stuk millimeterpapier aan een muur beves-

tigd, zoodanig, dat eene der beide rijen van deellijnen verticaal liep. In een punt O van eene dezer lijnen werd het profiel met behulp van eene fijne naald opgehangen, zoodat het zeer gemakkelijk langs het papier kon heen- en weerslingeren. De verticale lijn, die door het ophangpunt ging, werd nu eenvoudig langs eene liniaal over het profiel heen doorgetrokken. Door vervolgens het profiel met een ander punt in hetzelfde punt O op te hangen en de verticaal door dat punt weder, over het profiel heen, door te trekken, was het zwaartepunt bepaald. Eene derde ophangwijze diende tot contrôle. Gelukkigigerwijze sneden de lijnen elkander bij elke klok binnen het profiel, waardoor de bepaling zeer vergemakkelijkt werd. Eindelijk werd de plaats van het zwaartepunt aangeteekend in de fig. 5, 6 en 7 en de afstand ervan tot de omwentelingsas uitgemeten. Noemen we dezen afstand voor de klokken *B*, *dis* en *fis I* respectievelijk r_1 , r_2 en r_3 , dan hebben we:

$$r_1 = 48,8 \text{ c.M.}$$

$$r_2 = 37,7 \quad ,,$$

$$r_3 = 31,8 \quad ,,$$

Voor de verhoudingen dezer afstanden vindt men:

$$r_1 : r_2 = 1,29$$

$$r_2 : r_3 = 1,19$$

Het laatste getal is alweer geheel in overeenstemming met de getallen, die we vroeger voor *dis* en *fis I* gevonden hebben (blz. 29). Omgekeerd kan deze uitkomst, die natuurlijk ook uit de gelijkvormigheid volgt, als contrôle op de nauwkeurigheid der metingen gelden.

Alsnu werd opnieuw een profiel, ditmaal uit vrij dik millimeterpapier, gesneden en gewogen. In de

vooronderstelling dat dit papier overal homogeen en even dik was, kon daaruit het oppervlak van het profiel gemakkelijk gevonden worden. Ik vond:

Gewicht profiel <i>B</i>	133,5 mgr.
„ 4 c.M ² . papier	50,8 „
„ 8 „ „	101,5 „
„ 16 „ „	202,2 „

Uit de laatste drie getallen volgt met voldoende nauwkeurigheid, dat het papier homogeen was en dat 1 c.M². ervan gemiddeld 12,7 mgr. woog.

Derhalve is het oppervlak van het profiel:

$$133,5 : 12,7 = 10,512 \text{ c.M}^2.$$

Noemen we de ware grootte van het oppervlak O_1 , dan is, daar de figuur op schaal 1 : 10 is geteekend:

$$O_1 = 1051,2 \text{ c.M}^2.$$

Gewicht profiel *dis* 74,3 mgr,

waaruit men vindt voor het oppervlak in ware grootte:

$$O_2 = 585,0 \text{ c.M}^2.$$

Het profiel van *fis I* was blijkbaar uit zwaarder papier gesneden:

Gewicht profiel <i>fis I</i>	53,4 mgr.
„ 5 c.M ² . papier	64,4 „
„ 8 „ „	103,7 „
„ 10 „ „	129,2 „

Hieruit volgt voor het gemiddelde gewicht van 1 c.M². papier 12,9 mgr. en voor het oppervlak van het profiel in ware grootte:

$$O_3 = 414,0 \text{ c.M}^2.$$

Door toepassing van het theorema van GULDIN vinden we voor de inhoud der klokken, die we respectievelijk door V_1 , V_2 en V_3 aanwijzen:

$$\begin{aligned} V_1 &= O_1 \times 2 \pi r_1 = 322155 \text{ c.M}^3. \\ V_2 &= O_2 \times 2 \pi r_2 = 138502 \text{ „} \\ V_3 &= O_3 \times 2 \pi r_3 = 82677 \text{ „} \end{aligned}$$

B. Bepaling van het soortelijk gewicht.

Uit de chemische analyse bleek, dat de samenstelling en daarmee ook het soortelijk gewicht van de drie klokken ongeveer gelijk is. Om het te bepalen, zou ik misschien wel gebruik hebben kunnen maken van het metaalvijsel, dat van de klokken was afgenomen, maar vooreerst was dit zeer weinig (ongeveer 1 gram) en in de tweede plaats scheen mij de bepaling voor het metaal in poedervorm minder geschikt. Ik zocht ook tevergeefs naar eene opgave van het soortelijk gewicht bij de gevondene samenstelling van ongeveer 79 % koper en 21 % tin. HARZER¹⁾ geeft voor het soortelijk gewicht bij 80 % koper en 20 % tin 8,95 op. In de LANDOLT-tabellen vindt men:

75 % koper, 25 % tin.	Spec. gew. 8,83
79 % „ 21 % „	„ „ 8,73

Volgens deze opgave zou dus die van HARZER vermoedelijk vrij wat te hoog zijn. Ik heb daarom beproefd, zelf een metaalmengsel te gieten van de voor *fig. I* gevondene samenstelling, omdat de analyse daarvan waarschijnlijk de nauwkeurigste was. In een vuurvast porceleinen kroesje werd 19,5 gram zuiver koper (in den vorm van een dunnen band, zgn. geschaafd koper)

¹⁾ Glockengieszerei, p. 20.

door een lichtgas-zuurstofvlam gesmolten. Aan het tamelijk dik-vloeibare, lichtroodgloeiende metaal werd onder bestendig roeren met een ijzeren staafje 6,5 gram gegranuleerd tin bij kleine hoeveelheden toegevoegd. Het mengsel werd nog eenigen tijd geroerd, toen snel uitgegoten op een ijzeren plaat en terstond door koud water afgekoeld. Het doel dezer snelle afkoeling was, te voorkomen, dat in de gesmolten massa bij langzame afkoeling misschien het lichtere tin zich toch nog in de bovenste laag zou begeven en daar uitkristalliseeren. Het op deze wijze verkregen alliage was zeer hard en broos en had een helderen klank. Op verschillende breukvlakten met eene loupe beschouwd, vertoonde het geene noemenswaardige verschillen in samenstelling. Slechts hier en daar zag ik in de grauwe, doffe oppervlakte een schitterend wit puntje, misschien tinkristalletjes, misschien ook veroorzaakt door terugkaatsing van veel licht. Toch bleek het specifiek gewicht lang niet standvastig. Van zes stukjes, op verschillende plaatsen uit het gietsel genomen, schommelde het tusschen 8,64 en 8,84. De verschillen met de bovenvermelde getallen konden wellicht veroorzaakt zijn door de vorming van groote hoeveelheden oxyde tijdens het smelten. Ik deed daarom nog eene tweede reeks van bepalingen, nam van elk der metalen eene dubbele hoeveelheid en bedekte het koper voor het smelten met eene laag borax. De uitkomsten waren echter evenmin overeenstemmend; zij schommelden tusschen 8,64 en 9,12, wel een bewijs, dat hoe grooter de massa wordt, de homogeniteit des te moeilijker bereikt wordt.

Het resultaat van deze proef kan dus niet beschouwd worden als maatstaf bij de beoordeeling van de getallen die HARZER en de LANDOLT-tabellen opgeven. Aangezien echter aan de laatste zeker meer waarde dient gehecht te worden dan aan de eerste, zullen

we hier als soortelijk gewicht van het alliage met 79 % koper aannemen 8,7.

We vinden dan voor de gewichten der klokken in afgeronde getallen:

<i>B</i>	2803	K.G.
<i>dis</i>	1205	„
<i>fis I</i>	719	„

De juistheid van deze uitkomsten had ik gehoopt te kunnen beoordeelen naar de opgaven in de desbetreffende archieven. Het is mij echter niet gelukt, daarvan inzage te krijgen. Intusschen kunnen we hier nu gebruik maken van de empirische formule, waarvan in het begin van dit hoofdstuk sprake was. HARZER vermeldt,¹⁾ dat eene klok, die den toon *c* geeft, eene middellijn heeft van 2 voet 8 duim en 640 pond weegt. Bij gelijkvormigheid van twee klokken zullen de gewichten zich verhouden als de derdemachten van hare diameters. Noemen wij dus het gewicht van eene klok (in ponden) *G*, den diameter (in duimen) *d*, dan is, daar 1 voet = 12 duim:

$$G : 640 = d^3 : 32^3 \quad \text{of}$$

$$G = 0,0195 d^3$$

Stellen we nu 1 (Rijnlandschen) voet = 12 duim = 0,31385 Meter en 1 Pond = 0,5 KG., dan krijgen we voor de gewichten, daar 1 cM. = 0,3823 duim (vergelijk tabel op blz. 18).

¹⁾ L. c. p. 37.

$$B \left(\frac{169}{0,3823} \right)^3 \cdot 0,00975 = 2706 \text{ K.G.}$$

$$dis \left(\frac{130}{0,3823} \right)^3 \cdot 0,00975 = 1197 \quad ,,$$

$$fis I \left(\frac{109}{0,3823} \right)^3 \cdot 0,00975 = 707 \quad ,,$$

Mijne uitkomsten zijn dus hiermee vergeleken alle iets te groot en wel resp. 3,5 %, 0,7 % en 1,7 %.

Neemt men voor het specifiek gewicht 8,9, dan worden de fouten resp. 6 %, 2,8 % en 3,9 %. (Volgens BOECKELER¹⁾ heeft eene klok met grondtoon *B* (Duitsche schrijfwijze *H*) een diameter van 1,59 — 1,50 M. en een gewicht van 2600 — 2000 K.G. Voor *dis* zijn deze getallen 1,25 — 1,185 M. en 1225 — 925 K.G.; voor *fis* 1,045 — 0,990 M. en 715 — 525 K.G.)

Houdt men echter in het oog, 1° dat er waarschijnlijk niet onbelangrijke fouten gemaakt moeten zijn bij het uitknippen der profielen; 2° dat eene fout in den afstand van het zwaartepunt tot de as, welke afstand geschat moest worden in millimeters nauwkeurig, bij klok *B* $2\pi \times 0,1 \times 8,9$, d. i. ongeveer 300 malen vergroot in de uitkomst overgaat, dan mag de overeenstemming met de benaderingsformule inderdaad bevredigend genoemd worden.

1) Beiträge zur Glockenkunde, p. 125.

HOOFDSTUK V.

Grondtoon en Boventonen.

De trillingswijze eener klok en daarmee ook haar klank hangt af van de plaats waar zij aangeslagen wordt en van de intensiteit van aanslaan. Wezenlijk van invloed bleken voorts te zijn de vorm, de massa en het materiaal van het exciteerende voorwerp. Voor het aanslaan maakte ik gebruik, behalve van den klepel (die bij de drie luidklokken binnenin was opgehangen, terwijl bij de klokken van het carillon *bovendien* nog een klepel aanwezig was, die nabij het buitenoppervlak tegen een veerenden stalen beugel rustte) van een ijzeren hamer, die van een scherp punt en tevens van een plat cirkelvormig vlak van ongeveer 2,5 c.M. diameter voorzien was; voorts van stalen staafjes van verschillende dikte en meer of minder spits toeloozend en eindelijk van een houten hamertje. Elk van de genoemde voorwerpen kon op zijn beurt dienst doen, om een bepaalden toon te doen domineeren en dit kwam mij vooral ten nutte bij het bepalen van de knooplijnen van dien toon. (Zie hoofdstuk VI).

B. 122,07 tr.

Het verschil in vorm en samenstelling van deze klok met de klokken van HEMONY zou haar van deze

vermoedelijk ook onderscheiden door een verschil in de tonenreeksen. Daar zij bovendien de grootste van alle was en zich door hare plaats beter tot een onderzoek leende dan de andere, scheen zij mij een onderzoek op hare tonen volkomen waard.

De klepel van deze klok was van ijzer vervaardigd en had eene overlansche doorsnede, die wordt weer-

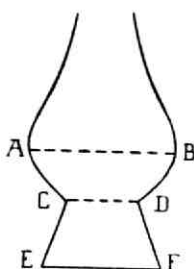


Fig. 10.

gegeven door fig. 10. De geheele lengte is 156 c.M. Het eigenlijke lichaam van den klepel heeft tot dwarsdoorsnede een regelmatigen achthoek. De zijde daarvan is bij AB 8 c.M., bij CD 4 c.M., bij EF 6 c.M. Voorts is AC = 11 c.M., CE = 14 c.M. De aanraking met het binnoppervlak der klok had plaats ter hoogte van AB.

Werd de klok door een krachtigen klepelslag in trilling gebracht, dan werden de volgende tonen gehoord:

B, d', fis',

waarbij *B* domineerde en *fis'* het zwakst was. Kort na het aanslaan werd hoorbaar *A*, d. i. de ondergrootse-seconde van den „grond”toon. Van het optreden van dezen toon heb ik geene verklaring kunnen vinden. Een combinatietoon kan het niet zijn. Immers het trillingsgetal 108,75 zou dan het verschil moeten zijn van twee trillingsgetallen uit de tonenreeks, die de klok kon voortbrengen. Deze reeks nu was, zooals hieronder nog nader zal worden toegelicht:

B, d, b, d', e', fis', fis''.

Men vindt gemakkelijk, dat uit deze reeks geen verschiltoon van 108,75 trillingen kan komen. Nog

éénmaal, namelijk bij het onderzoek van de klok *dis* heb ik een toon waargenomen, *lager* dan de „grond”-toon, maar nooit meer dan één. Volgens BOECKELER was het het streven van de oude meesters, om dezen onderton naast den grondtoon te verkrijgen ¹⁾. Lord RAYLEIGH daarentegen vermeldt in zijne *Theory of Sound* ²⁾, dat van vijf door hem onderzochte klokken behorende tot een Engelsch klokkenspel (*Terling Peal*) de eigenlijke of hoofdtoon (*nominal tone*) de *viijfde* was van de geheele reeks van tonen, die elk kon voortbrengen. Twee Belgische klokken, mede door RAYLEIGH onderzocht, hadden echter tot hoofdtoon den *tweeden* der reeks, die elk kon voortbrengen ³⁾. Uit een en ander blijkt, dat deze klokken een wezenlijk onderscheid toonen met de door mij onderzochte. Het is mogelijk, dat mij bij het onderzoek wegens gemis van resonatoren enkele tonen ontgaan zijn, maar dit zou dan in de eerste plaats te verwachten zijn van octaven en quinten, omdat in het algemeen een toon des te gemakkelijker aan het gehoor ontgaat, naarmate hij met de andere beter conso-neert. Echter zijn het in RAYLEIGH's onderzoek geenszins zulke eenvoudige intervallen, die hij beneden den hoofdtoon gehoord heeft. Zoo vindt hij bijvoorbeeld bij eene klok, in 1810 door MEARS gegoten, de tonenreeks:

a, gis', b', dis'', gis'',

waarvan *gis''* de hoofdtoon is. Van de 4 daaraan voorafgaande tonen, tezamen gehoord, zou er zeker géén aan het gehoor ontsnappen, omdat de *a* sterk

¹⁾ L. c. p. 121.

²⁾ I, p. 393.

³⁾ Phil. Mag. 29, 1890.

dissonceert met het mineur-akkoord *gis' b' dis''*. Bij eene andere klok, eveneens van MEARS, vond hij:

e', c'', f'', bes'', d''', f''',

waarvan de hoofdtoon *d'''* was. Ook hier vormen de 4 voorafgaande tonen een scherpen dissonant.

Er bestaat dus in ieder geval een wezenlijk verschil tusschen de klokken die RAYLEIGH onderzocht heeft en de in dit proefschrift besprokene.

Werd de klok aangetikt tusschen B en C (fig. 11) op den overgang van convex naar concaaf, dan werden gehoord:

B, d, b —, e'.

Het — teeken wijst aan, dat de 3^{de} toon tusschen *bes* en *b* lag. De 1^{ste} en 4^{de} van deze reeks waren het sterkst.

Eene merkwaardige gelijkenis met het geluid eener klok in het algemeen wordt inderdaad verkregen, wanneer men deze

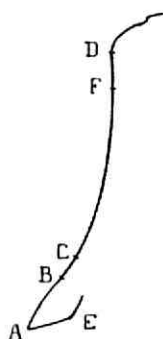


Fig. 11.

4 tonen tegelijk op eene piano aanslaat, met inachtneming der intensiteiten. De none *d-c'* geeft daarbij het doordringende, karakteristiek „valsche” dat klokken meestal kenmerkt. Volgens Lord RAYLEIGH zou men in de nabijheid van eene klok staande, haar hoofdtoon niet als zóódanig herkennen, maar wel op een afstand; m. a. w. op een afstand zou men den indruk krijgen, dat de klok slechts één toon voortbracht en deze zou dan *de* toon der klok zijn. Nu mag het waar zijn, dat op een afstand niet alle tonen duidelijk hoorbaar zijn, sommige zelfs in 't geheel niet, de aandachtige hoorder zal toch, in den regel althans, niet kunnen zeggen, dat hij één *hoofdtoon* hoort. Oppervlakkig lijkt het wél aldus, maar men kan hier met recht spreken van een gehoors-

bedrog. Beproeft men nl. den gewaanden hoofdtoon na te zingen of op een muziekinstrument na te spelen, dan bemerkt men, dat de nagebootste toon de toon der klok niet is. Terstond hoort men dan in het geluid der klok een anderen toon, die zich op den voorgrond dringt en dien men alsdan geneigd is voor den hoofdtoon te houden. Dit akustisch bedrog kan zich zelfs meermalen herhalen. Wat men op een bepaald oogenblik als hoofdtoon hoort, blijkt grootendeels af te hangen van het opzettelijk zoeken of luisteren naar dien toon. Bij het spelen van een carillon zijn het de tonen der melodie, die wij om zoo te zeggen van te voren reeds verwachten, welke wij hooren. De aandacht is dan van te voren op een toon gevestigd. En zoo kan het dan schijnen, dat elke klok van het carillon één hoofdtoon heeft. Maar geheel anders wordt het, wanneer men aandachtig luistert naar de *slagen* van éénzelfde klok. Dan kan men, ook op een afstand, bezwaarlijk nog spreken van één hoofdtoon. Ik zou de meening van Lord RAYLEIGH kunnen deelen, wanneer de klok alleen harmonische tonen voortbracht, maar de klokken, waarvan deze onderzoeker spreekt, doen dit allerm minst. En toch krijgt men volgens RAYLEIGH, naar deze klokken op een afstand luisterende, den indruk alsof zij de eerste vijf tonen van den toonladder van *fis*-majeur gaven, nl.: *fis*", *gis*", *ais*", *bis*", *cis*". Dit nu wordt terstond duidelijk, als men bedenkt, wat hierboven van het luisteren naar eene melodie gezegd is. Bovendien, eene klok met uitsluitend harmonische boventonen zal wel nooit gemaakt zijn; HEMONY, die toch tot de beroemde klokkengieters behoort, heeft het, althans wat den te Amsterdam aanwezigen klokken betreft, niet zoover gebracht.

Werd de klok aangetikt op het bolle gedeelte

tusschen B en C, dan werd naarmate men hooger kwam, de *b* zwakker, daarentegen werden *B* en *e'* sterker. Nog hooger, op het holle gedeelte tusschen C en D kreeg *B* de overhand en werden de drie overige tonen bijna onmerkbaar. Bij eene oppervlakkige waarneming is het dan ook, alsof de klok, aangeslagen in de nabijheid van den slagring, een toon geeft, die juist het hoogere octaaf is van den toon dien men hoort bij aanslaan op het bovenste gedeelte der klok. Zooals wij nog nader zullen zien, werd dit ook bij alle andere klokken waargenomen.

Het stuk tusschen A en B werd nu, omdat de klok daar ter plaatse bij het gebruik wordt aangeslagen, nader onderzocht, zooveel mogelijk langs den geheelen omtrek. In verschillende meridiaanvlakken, maar op gelijke hoogte, waren de resultaten in hoofdzaak dezelfde (vergelijk echter het volgende hoofdstuk; de zwevingen, die daar besproken zullen worden, en die van belang zijn voor het bepalen der knoopmeridianen, kunnen hier buiten beschouwing blijven). Verschillende wijzen van aanslaan gaven geene nieuwe tonen bij de reeds gevondene, hoewel de intensiteit van deze daardoor verschillend werd. Alleen door een korten, krachtigen slag met een spitsen hamer gelukte het, nog een zeer hoogen toon, nl.:

fis''

voort te brengen. Op dezelfde wijze kon ik, bij aanslaan tusschen C en D krijgen *d'*, welke echter niet dezelfde hoogte had als die door den klepelslag was verkregen. Ik liet nl. een klepelslag (niet onmiddellijk) volgen door een aanslag als boven beschreven en telde toen duidelijk 5 zwevingen per sec. Opmerking verdient nog, dat bij eenige snel op elkander volgende klepelslagen *fis'* zich geleidelijk *verlaagde* tot ongeveer

f', dus bijna een halven toon en daarbij steeds in sterkte *afnam*.

dis. 153,8 tr.

Zacht aanslaan met een houten hamertje tegen den onderrand bij A gaf de tonen:

dis', *fis'*, *gis'*. (1)

De derde daarvan werd alleen gehoord onmiddellijk na het aanslaan, het geluid was van korten duur maar scherp. De eerste twee klonken lang na, *fis'* het langst.

Bij dezelfde wijze van aanslaan tegen de binnenzijde tusschen A en E werden gehoord:

dis, *dis'*, *fis'*.

De eerste dezer tonen is de hoofdtoon der klok; hij klonk zeer lang en duidelijk na, evenals nu ook weder *fis'*. Daarentegen was nu *dis'* spoedig weggestorven.

Aanslaan met een spitsen, stalen hamer aan den buitenkant even boven den rand gaf de volgende reeks:

dis, *dis'*, *fis'*, *gis'*. (2)

De hoofdtoon was nu zeer sterk. Uit (1) en (2) blijkt, dat bij grootere massa van den hamer lagere tonen gevormd worden.

Werd de klok aangestreken langs een parallelcirkel, ter hoogte van den slagring, dan ontstonden twee zeer hoge tonen:

gis'', *c'''*.

Bij aanslaan boven B kwam de laagste toon, *dis*, het meest uit. Diezelfde toon werd ook nog zeer duidelijk vernomen tot het punt F toe. Dit is dus in overeenstemming met de opmerking bij klok B ge-

maakt. *fis'* kon ter hoogte van het punt F ook nog duidelijk gehoord worden; een krachtige slag met den stalen hamer verhoogde hem tot ongeveer *g'*. Bij zeer sterken klepelslag hoorde ik ook hier nog een toon beneden den grondtoon gelegen, nl. *cis*. Deze kan weer geen verschiltoon zijn, zooals blijkt uit de geheele tonenreeks:

dis, dis', fis', gis', gis'', c'''.

fis I. 182,9 tr.

Zacht aantikken met een houten hamertje bij A gaf:

fis', b'.

Krachtig aanslaan met puntigen stalen hamer op dezelfde plaats gaf echter

fis, a'.

Ook hier dus weder het lagere octaaf wanneer de massa van den hamer vergroot wordt. De toon *a'* kon geheel op zichzelf gehoord worden, wanneer eene normaal-*a'* stemvork, die krachtig trilde, met den steel tegen de klok werd aangedrukt ter hoogte van den slagring en vervolgens ervan verwijderd. De klok deed dezen toon dan op geheel andere wijze hooren. Het geluid was volkomen vrij van bijtonen en daardoor zuiver en helder. Dit merkwaardige resonantie-verschijnsel wordt ook door RAYLEIGH beschreven; hij zegt, dat een toon, op deze wijze door eene klok voortgebracht, een geheel afzonderlijk karakter heeft: „The sound is so utterly unlike that usually associated with bells, that an air of mystery envelops the phenomenon.” Uit hetgeen in hoofdstuk VI zal worden medegedeeld, blijkt dat de stemvork daár tegen de klok moet gedrukt worden, waar een van de (steeds elkander vergezellende) tonen, die weinig in hoogte

verschillen, een knoop heeft. Als ik de vork juist gelijk gestemd had met den anderen toon, door de beenen met een stukje was te verzwaren, dan trilde deze duidelijk mede. Als ik echter de vork op eene willekeurige plaats tegen de klok drukte, hoorde ik zes goed te onderscheiden zwevingen per sec.

Ook bij deze klok werd het lagere octaaf *fis* sterker, daarentegen *fis'* zwakker, bij aantikken op den overgang van convex naar concaaf. Boven het punt C was *fis* domineerend, tusschen A en B echter *fis'*. Bij zacht aanslaan met een houten hamertje tusschen C en D werd een nagenoeg volkomen harmonie gehoord van 4 tonen:

$$fis +, a, fis', a'.$$

Het + teeken wijst weer aan, dat de eerste toon tusschen *fis* en *g* lag, waardoor hij met *fis'* een zoo-genaamd klein octaaf vormde. Het verschil was echter zeer gering.

Door een krachtigen stoot in een meridaanvlak tegen den onderrand konden weder twee hooge tonen worden voortgebracht,

$$b'', cis''',$$

waarvan de laatste lang naklonk.

Bij krachtigen klepelslag was deze toon ook duidelijk hoorbaar in combinatie met den grondtoon en de kleine terts van zijn octaaf:

$$fis, a', cis'''.$$

Deze harmonische drieklank werd derhalve gestoord door het optreden van de bovenvermelde tonen *b'* en *b''*.

fis II. 182,9 tr.

Deze klok, de grootste van het carillon, wordt tevens als slagklok voor de halve uren gebruikt. Behalve wat

haren afmetingen betreft, (zie tabel blz. 18) vertoont zij ook zeer groote overeenkomst met *fis I* in de tonen, die zij kan voortbrengen. Wegens hare plaatsing moest het onderzoek echter onvolledig blijven. Zacht aantikken kon hier, door het gedruisch in de omgeving, geen resultaat hebben. Bovendien was het oppervlak slechts voor een deel met het oor te naderen. Daardoor verviel vanzelf het opsporen van knopen en buiken.

Ook hier werd weer waargenomen het omslaan in het lagere octaaf bij den overgang van het convexe naar het concave gedeelte. Bij klepelslag werden 4 tonen duidelijk vernomen, nl.:

fis, fis', a', cis'''.

fis' domineerde slechts korten tijd na het aanslaan. De 4 tonen vormen blijkbaar een volkomen (mineur)-accoord. Of de storende tonen *b'* en *b''*, die in de klok *fis I* aanwezig waren, hier ontbraken, dan wel, of ze te zwak waren om in deze omstandigheden opgemerkt te worden, is moeilijk te zeggen. Het aannemelijkst is zeker wel, dat er storende bijtonen aanwezig waren, die zich als het ware vereenigden met zoovele andere tonen, waaruit het gedruisch der omgeving geacht kan worden te bestaan. Intusschen moet opgemerkt worden dat bij de volgende klokken wel degelijk anharmonische boventonen gehoord werden.

g. 193,8 tr.

Ook hier weder omslaan in het lagere octaaf bij den overgang van het bolle naar het holle gedeelte van het oppervlak. Aanslaan nabij den slagring gaf de tonen

g, bes', c'',

dus *geene* harmonische combinatie.

Een slag op het holle gedeelte veroorzaakte slechts 2 tonen, n.l.

g, *bes'*.

Een krachtige klepelslag deed de 5 genoemde tonen alle tegelijk hooren, zonder evenwel nieuwe tonen te vormen, althans voor zoover hier kon worden nagegaan. Hierbij domineerde onmiddellijk na het aanslaan *g'*, terwijl *g* lang naklonk.

gis 205,3 tr.

De tot nu toe steeds bevestigde regel van het omslaan van den hoofdtoon in het lagere octaaf, bij overgang van het convexe naar het concave gedeelte van het oppervlak ging ook hier weer door. Aanslaan nabij den slagring gaf

gis', *b'*, *d''* —.

Ongeveer op de helft der hoogte aangeslagen, waren de eerste twee dezer tonen nog duidelijk, hoewel veel zwakker, hoorbaar (*b'* het duidelijkst), terwijl *gis'* domineerde. Een klepelslag bracht bij de genoemde tonen nog *e''* —, zoodat dan te zamen gehoord werden

gis, *gis'*, *b'*, *d''* —, *e''* —,

waarbij *gis'* korten tijd domineerde.

a. 217,5 tr.

Wederom omslaan in het lagere octaaf bij den overgang van het convexe naar het concave gedeelte van het oppervlak. Noch bij aantikken, noch bij aanslaan met den klepel kon ik van deze klok anharmonische boventonen hooren. Haar klank was dan ook zacht en helder. De hoorbare tonen, 4 in getal, waren

a, *a'*, *c''*, *e''*.

Onmiddellijk na den aanslag domineerde korten tijd *a'*.

ais. 230,4 tr.

Wat het omslaan in het lagere octaaf betreft, gedroeg deze klok zich als alle voorgaande. Het aantal hoorbare tonen bedroeg 6, n.l.:

ais, *cis'*, *ais'*, *cis''*, *dis''*, *f''*.

Onmiddellijk na het aanslaan domineerde *ais'*. Opvallend was hier het bijzonder lang en helder naklinken van den 4^{den} toon. *f''* was zwak; als *eis* opgevat, vormde deze toon met de eerste vier tonen een harmonisch accoord. *dis''*, die vrij sterk klonk, vormde een hinderlijken dissonant.

b. 244,1 tr.

Gewoon gedrag wat betreft het omslaan in het lagere octaaf. Op de bovenste helft aangeslagen, gaf de klok

b, *dis''* +.

De laatste toon steeg gestadig, naarmate het aanslaan dichter bij de kroon plaats had. Nabij de kroon was hij bijna *e''*.

Het optreden van den toon *dis''* is als bijzonderheid aan te merken, daar hij de *grootte* terts van het octaaf is, terwijl bij alle voorgaande klokken de *kleine* terts voorkomt. Deze kon echter ook hier verkregen worden door een matig sterken klepelslag en klonk in dat geval bijzonder lang na. Door zeer sterk aanslaan voegde zich bij deze kleine terts *d''* nog *fis''*. Hoogere boventonen waren, naar den klank te oordeelen, vermoedelijk wel aanwezig, maar de omgeving was niet rustig genoeg om daarvan met zekerheid iets te onder-

scheiden, zonder gebruik te maken van resonatoren. De waargenomen tonen vormden dus tezamen de reeks

$$b, b', d'', dis'' + , fis''.$$

Oogenblikkelijk na een klepelslag domineerde b' .

c' . 258,7 tr.

Gewoon gedrag bij aantikken op convex en concaaf gedeelte. Aanslaan bij den slagring gaf

$$c', c'', es'', f''.$$

c'' werd duidelijk maar slechts korten tijd gehoord bij gewonen klepelslag, terwijl de intensiteit van f'' zeer gering was, de duur kort. c' en es'' klonken tezamen lang na. Op een afstand hoorde men ten slotte alleen c' . Het spoedig wegsterven van f'' voorkwam blijkbaar dissonantie.

cis' . 274,0 tr.

Het gedrag dezer klok was geheel analoog aan dat van de vorige. De tonenreeks was n.l, voor zoover hoorbaar:

$$cis', cis'', e'', fis''.$$

De tweede toon had weder bij klepelslag groote intensiteit maar was spoedig verdwenen, de vierde had geringe intensiteit en nog korter duur, cis'' en e'' klonken tezamen weer lang na. Op afstand werd ten slotte alleen cis'' gehoord.

d' . 290,3 tr.

Deze klok was moeielijk bereikbaar. Voor zoover ik kon nagaan, gaf zij

$$d', d'', f''.$$

f'' was alleen dichtbij hoorbaar, d'' werd spoedig na

den aanslag onmerkbaar. In hoofdzaak was dus het gedrag als dat van de beide voorgaande klokken.

dis'. 307,6 tr.

Gewoon gedrag op convex en concaaf gedeelte. Hoorbaar waren 4 tonen:

dis', *dis''*, *fis''*, *gis''*.

dis'' duurde weer kort maar had groote intensiteit, *gis''* was zwak en van nog korter duur. Van de beide overige tonen werd op eenigen afstand der klok alleen *dis'* gehoord.

e'. 325,9 tr.

Deze klok geleek in vele opzichten op de voorgaande. Ze gaf 4 tonen:

e', *e''*, *g''*, *b''*.

Een verschil vinden we derhalve in den laatsten toon, die de quint van het octaaf is, terwijl in de vorige de quart van het octaaf voorkomt. Het octaaf *e''* zelf had alweer groote intensiteit onmiddellijk na het aanslaan, maar duurde kort.

Ten slotte heb ik nog de tonen onderzocht van vier kleinere klokken, waarvan ik de afmetingen niet kon bepalen, maar die toch voor het oor van ééne zijde gemakkelijk te naderen waren. Ik wilde n.l. zien, of ook de kleinere klokken dezelfde tooncombinaties geven als de groote in hoofdzaak bleken te doen. Inderdaad was dit het geval, zooals men bemerkt aan de volgende vier groepen:

<i>gis'</i>	<i>gis''</i>	—	<i>dis'''</i>
<i>a'</i>	<i>a''</i>	<i>c'''</i>	<i>e'''</i>
<i>bes'</i>	<i>bes''</i>	<i>des'''</i>	<i>f'''</i>
<i>b'</i>	<i>b''</i>	<i>d'''</i>	<i>fis'''</i> .

In de eerste rij ontbreekt de toon b'' , maar dit daar-
gelaten, geven alle naast den grondtoon: octaaf, kleine
terts van het octaaf en quint van het octaaf.

Wanneer men de tonenreeksen door de verschillende
klokken voortgebracht, nagaat, ontmoet men bij alle
zonder uitzondering het octaaf en de kleine terts
daarvan, zooals een blik op de hierna volgende tabel
terstond doet zien. (De tonen *in* de kolommen tusschen ()
geplaatst, passen er niet volkomen in, omdat zij onge-
veer een halven toon te hoog zijn). Daarbij komt bij
vele nog de quart van het octaaf.

Grondtoon.	Kl. terts.	Octaaf.	Kl. terts van octaaf.	Quart van octaaf.	Quint van octaaf.	Quint van tweede octaaf.	Ondertoon.
<i>B</i>	<i>d</i>	<i>b—</i>	<i>d'</i>	<i>e'</i>	<i>fis'</i>	<i>fis''</i>	<i>A</i>
<i>dis</i>	—	<i>dis'</i>	<i>fis'</i>	<i>gis'</i>	—	<i>gis''</i> , (<i>c'''</i>)	<i>cis</i>
<i>fis I</i>	<i>a</i>	<i>fis'</i>	<i>a'</i>	<i>b'</i>	—	(<i>b''</i>), <i>cis'''</i>	—
<i>fis II</i>	—	<i>fis'</i>	<i>a'</i>	—	—	<i>cis'''</i>	—
<i>g</i>	—	<i>g'</i>	<i>bes'</i>	<i>c''</i>	—	—	—
<i>gis</i>	—	<i>gis'</i>	<i>b'</i>	(<i>d''—</i>)	—	(<i>e''—</i>)	—
<i>a</i>	—	<i>a'</i>	<i>c''</i>	—	<i>e''</i>	—	—
<i>ais</i>	<i>cis'</i>	<i>ais'</i>	<i>cis''</i>	<i>dis''</i>	<i>f'' = eis'</i>	—	—
<i>b</i>	—	<i>b'</i>	<i>d'', (dis'')</i>	—	<i>fis''</i>	—	—
<i>c'</i>	—	<i>c''</i>	<i>es''</i>	<i>f''</i>	—	—	—
<i>cis'</i>	—	<i>cis''</i>	<i>e''</i>	<i>fis''</i>	—	—	—
<i>d'</i>	—	<i>d''</i>	<i>f''</i>	—	—	—	—
<i>dis'</i>	—	<i>dis''</i>	<i>fis''</i>	<i>gis''</i>	—	—	—
<i>e'</i>	—	<i>e''</i>	<i>g''</i>	<i>h''</i>	—	—	—
<i>gis'</i>	—	<i>gis''</i>	—	—	<i>dis'''</i>	—	—
<i>a'</i>	—	<i>a''</i>	<i>c'''</i>	—	<i>e'''</i>	—	—
<i>bes'</i>	—	<i>bes''</i>	<i>des'''</i>	—	<i>f'''</i>	—	—
<i>b'</i>	—	<i>b''</i>	<i>d'''</i>	—	<i>fis'''</i>	—	—

In hoofdzaak is dus het klankgehalte van alle
klokken hetzelfde.

Verschil in klank kan echter nog wel bestaan door
een verschil in intensiteit der boventonen. Een punt van
gewicht is nog het volgende. Lord RAYLEIGH, over den
hoofdtoon of eigenlijken toon (nominal pitch) van klok-

ken sprekende,¹⁾ merkt op, dat deze niet zelden een octaaf te laag geschat wordt. Inderdaad heb ik bij mijn onderzoek zelf een tijdlang in twijfel verkeerd of ik in bovenstaande rijen den eersten of den derden toon te beschouwen had als hoofdtoon. Wanneer we nu afzien van het op blz. 52 en 53 besproken feit, dat de bijkomstige tonen vaak zulk eene intensiteit hebben, dat men eigenlijk niet meer spreken kan van één hoofdtoon, dan is de door RAYLEIGH genoemde „dwaling” aan de hand van het voorgaande te verklaren. Alle klokken toch geven onmiddellijk na een krachtigen klepelslag, maar gedurende zeer korten tijd, (bijv. $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{2}$ sec.) het hoogere octaaf van den grondtoon als *domineerenden* toon. Dit octaaf is het, dat men volgens RAYLEIGH den nominal pitch zou kunnen noemen. En men zal het ook aldus noemen, wanneer de slag onmiddellijk gevolgd wordt door een tweeden, hetzij op dezelfde, hetzij op eene andere klok, zooals in den regel bij speelklokken het geval is. Maar volgt die tweede slag niet, dan hoort men nog lang (bij klok *fis II*, die de halve uren sloeg, minstens 10 seconden op een afstand van circa 2 M.) na het wegsterven van den kortdurenden toon het lagere octaaf zeer duidelijk, hoewel veel minder intensief, ten minste als de omgeving rustig is, of als men dicht bij de klok staat. Men overtuigt zich hiervan gemakkelijk, wanneer in de nachtelijke stilte eene klok eenige slagen doet hooren. Alle slagen zullen dan als het hoogere octaaf klinken — behalve de laatste. Nu is het dus de vraag: Wat zal men den hoofdtoon noemen: den toon, die slechts een deel eener seconde de andere overheerscht en dan onhoorbaar wordt, of den toon, die zich daarna gedurende vele seconden laat hooren? Ongetwijfeld is er iets te zeggen voor de eerste op-

1) Phil. Mag. 29, 1890, p. 5.

vatting, omdat nl. de hoorder in de meeste gevallen betrekkelijk ver van de klok verwijderd is en hij, wanneer de klanken elkaar snel opvolgen, alleen afgaat op den éérsten indruk van elk dezer klanken. Maar bij eene eenigszins nauwkeuriger waarneming en vooral in de nabijheid der klok zal de indruk anders en daarmee zijn oordeel gewijzigd worden. Alsdan verdient zeker het lagere octaaf den naam van hoofdtoon. Naar dezen toon is het dan ook, dat in de voorgaande bladzijden de klokken genoemd zijn.

Volgens de voorgaande redencering zou, gelijk uit de tabel blijkt, bij de meerderheid der klokken de *tweede*, bij slechts drie de *derde* toon hoofdtoon zijn in den zin dien RAYLEIGH daaraan toekent en wanneer men bij de klokken *B* en *dis* den ondertoon nog meerekent, respectievelijk de *vierde* en *derde*.

Er blijft dus een essentieel verschil bestaan tusschen de Engelsche klokken door Lord RAYLEIGH onderzocht en die van HEMONY.

Vanzelve zijn we nu genaderd tot de vraag: Wat is het, dat HEMONY's klokken, wat hare zuiverheid van klank aangaat, verheft boven die van de meeste klokkengieters? Een blik op de tabel van blz. 63 doet ons zien, dat in *al* zijne klokken de grondtoon vergezeld gaat van het octaaf en de kleine terts daarvan, d. w. z. in elke klok zijn aanwezig de voornaamste elementen van een zuiver mineur-accoord. Wel is waar komen hierbij nog andere tonen, die de harmonie van de drie genoemde verstoren, maar ze zijn van veel geringer intensiteit en zullen waarschijnlijk geen ander effect hebben, dan den klank doffer te maken zonder zijne muzikale reinheid al te zeer te schaden. (In hoeverre deze tonen opzettelijk in de klok gelegd zijn, is natuurlijk niet uit te maken, maar dat de quart of soms ook de quint van het octaaf nooit mankeert,

kan men bezwaarlijk aan toeval wijten). De voornaamste tonen van elke klok van HEMONY zijn in ieder geval grondtoon, octaaf, kleine terts van het octaaf. De klok van MOER en Gebrs. JANSEN vertoont er overeenkomst mede, maar de toon e' , die in de overigens harmonische tonenreeks niet thuis hoort, heeft eene zoodanige intensiteit, dat de reinheid van klank benadeeld wordt. We hebben voorts gezien, dat voor den hoorder op afstand het octaaf als hoofdtoon klinkt en dat deze dadelijk overstemd wordt door den grondtoon, d. w. z. elke klok wordt gekarakteriseerd door het reinst mogelijke interval, want dit is het octaaf. De kleine terts zal daarbij het hare doen; haar gewoon effect is, dat zij een ernstig karakter aan den grondtoon verleent.

Vergelijken we nu deze klokken eens met de vijf klokken van het Engelsche klokkenspel, dat RAYLEIGH onderzocht heeft. Een daarvan gaf de tonen:

$$e', c'', f'', bes'', d''', f'''$$

en eene andere:

$$es', d'', f'', bes'', d''', g'''.$$

Volgens RAYLEIGH was van beide de hoofdtoon d''' . Er is niet veel kennis van intervallen noodig, om te zien 1° dat de tonen f'' , bes'' en f''' , die met den hoofdtoon wél een volmaakt accoord vormen, nooit zullen meewerken om den hoofdtoon voller te maken; wél zal dit gebeuren met bes'' door d''' en f''' ; 2° dat de tonen e' en c'' , die waarschijnlijk veel meer invloed hebben door grootere intensiteit, met het genoemde accoord heftige dissonantie vormen.

HOOFDSTUK VI.

Trillingswijzen der Klokken.

Evenals eene trillende vlakke plaat zal ook eene trillende klok zich in een aantal deelen verdeelen, die van elkander gescheiden zijn door de zgn. *knooplijnen*. De gedaante dezer knooplijnen kan bij eene plaat experimenteel gemakkelijk bepaald worden door de bekende klankfiguren van CHLADNI. Ook theoretisch kan men haar nagaan. Bij trillende klokken kan men soms de knooplijnen, behoorende bij eene bepaalde trillingswijze, ook nog wel experimenteel vaststellen, door tegen het oppervlak kleine slingers te hangen, die op de knooplijnen in rust moeten blijven, of wel door het oppervlak, naar MELDE'S handelwijze, te bedekken met eene dunne laag kalkmelk, die met zand is vermengd en het dan in trilling te brengen; de knooplijnen worden dan duidelijk zichtbaar.

Heeft de klok eene eenvoudige gedaante, bijvoorbeeld van een halven bol, en is de wand dun en overal even dik, dan kan men ook langs theoretischen weg in sommige gevallen de verdeeling en gedaante der knooplijnen nagaan.

Geheel anders staat het met eene klok, die niet uitsluitend uit eene dunne schaal bestaat en dit is juist het geval met toren- of kerkklokken. Nog afgezien van de moeielijkheid, dat de gedaante van het opper-

vlak niet in eene vergelijking te vatten is (bij benadering is het voor te stellen door eene vereeniging van een cylinder met twee of drie afgeknotte kegels of ook door de helft van eene éénbladige omwentelings-hyperboloïde, afgesloten door eene vlakke plaat) wordt een mathematisch onderzoek onmogelijk door de ongelijke massaverdeeling. Nabij de opening toch is de wand eener klok aanzienlijk verzwaard tot den zgn. *slagring* (Schlagring, Sound-bow). Om de knooplijnen te bepalen, blijft dus geen andere weg over dan een experimenteel onderzoek. De volgende handelwijzen komen daarvoor in aanmerking.

1°. Het gebruik van de voornoemde slingers.

Bij de enorme metaal massa's die eenigszins groote klokken bevatten, is het mij gebleken, dat de amplitudines der trillende oppervlakte te klein waren om een uiterst klein koperen bolletje, dat aan een draad was opgehangen, zichtbaar op zijde te stooten. Daarbij deed zich bovendien het ongemak voor, dat het bolletje tengevolge van de sterke luchtstroomingen nooit geheel stil hing. In een volkomen gesloten vertrek zou misschien met een kurk- of vlierpitkogeltje resultaat verkregen worden, maar in een toren is daarvan geen sprake, zelfs niet bij stil weder.

2°. Het drukken van een metalen punt of hamertje tegen het trillende oppervlak. Door middel van het gevoel moet dan uitgemaakt worden, of het oppervlak daar ter plaatse in rust is of niet. Deze methode is onzeker, omdat er òn door de tangentiale trillingen (waarover later) òn door het optreden van boventonen geene plaatsen van absolute rust zijn. Het is bovendien gemakkelijk te begrijpen, dat deze methode alleen kon worden toegepast, als de klok in heftige trilling werd gebracht door een klepelslag en dat zij geheel faalde bij aantikken met een staafje.

3°. Onderstellen wij, dat we te doen hebben met

een zuiver omwentelingsoppervlak. Het is duidelijk, dat dan vooreerst knooplijnen te vinden zullen zijn in vlakken *door de as* der klok en dat deze op gelijke afstanden over den omtrek verdeeld zullen zijn. We zullen deze knooplijnen *knoopmeridianen* noemen. Het is echter ook mogelijk, dat het oppervlak door een of meer vlakken *loodrecht op de as* in twee of meer deelen wordt verdeeld, die in tegengestelde phase verkeereren. Alsdan vinden we op het oppervlak ook een of meer cirkels als knooplijnen. (Natuurlijk is er alleen maar sprake van *cirkels*, zoolang het oppervlak omwentelings-oppervlak is, dus zoolang het *niet* trilt). We zullen deze cirkels *knoopparallellellen* noemen.

We willen beginnen met het onderzoek der knoopmeridianen.

Zij A (fig. 12) een punt van het oppervlak, dat door een slag in trilling wordt gebracht in het meridiaanvlak van A en zij A B C D de doorsnede van de klok door A loodrecht op de as. Onderstellen we, dat de de klok haar laagsten toon geeft zonder boventonen, dan trilt zij op de eenvoudigste wijze. Dat wil zeggen: het oppervlak krijgt een buik in A en ook nog een buik met dezelfde phase — en slechts één — diametraal tegenover A. De vervorming der doorsnede is dan elliptisch en midden tusschen deze buiken liggen twee andere met tegengestelde phase als A. Midden tusschen de vier buiken zijn de knopen gelegen. In dit geval hebben we dus 4 knopen, K_1 , K_2 , K_3 en K_4 . De deelen $K_1 K_2$ en $K_3 K_4$ zijn in dezelfde phase, zoo ook $K_2 K_3$ en $K_1 K_4$; beweegt het deel $K_1 K_2$ zich binnenwaarts dan doet ook $K_3 K_4$ dit, terwijl $K_2 K_3$

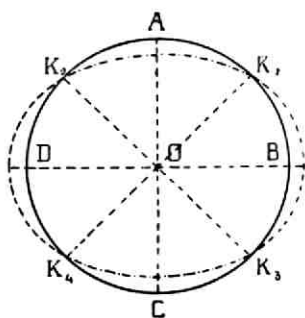


Fig. 12.

en K_1 K_4 zich buitenwaarts bewegen en omgekeerd. De figuur geeft de gedaante weer, zooals die is na $\frac{1}{4}$ trillingstijd (T). Na $\frac{1}{2}$ T is de doorsnede weer cirkelvormig, na $\frac{3}{4}$ T weer elliptisch, maar de groote en kleine as zijn nu verwisseld enz. Over het geheele oppervlak vinden we nu als knoopmeridianen de asdoorsneden der klok, die door K_1 , K_2 , K_3 en K_4 gaan.

We hebben hier dus 2 deelen, die zich op dezelfde wijze bewegen en 4 knoopmeridianen.

Denken we ons vervolgens eene trillingswijze, waarbij 3 deelen in dezelfde phase verkeerren, dan zien we dadelijk dat er 6 knoopmeridianen moeten zijn. Fig. 13 licht dit nader toe. De naast hoogere trillingswijze is die, waarbij 4 deelen in dezelfde phase verkeerren; zij heeft 8 knoopmeridianen (fig. 14). De stukken die in dezelfde phase verkeerren, zijn door eenzelfde soort van stippellijn aangegeven (--- of -.-.-.-).

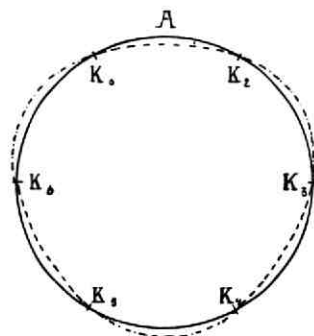


Fig. 13.

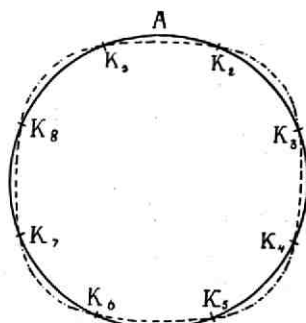


Fig. 14.

In het algemeen kunnen we nu zeggen, dat *wanneer de bewegingswijze van een bepaald segment, waarvan alle punten in dezelfde phase verkeerren, zich langs den omtrek n malen herhaalt, er $2n$ knoopmeridianen zijn.*

Wanneer dan een waarnemer met het oor zoo dicht mogelijk bij A is geplaatst, en de klok wordt langzaam

om hare as gewenteld, dan zal de toonsterkte voor den waarnemer geleidelijk moeten verminderen, omdat de amplitudo van het trillende gedeelte, dat voor het oor komt, afneemt. Is de knoop K_1 bij het oor gekomen, dan zal hij nagenoeg geen geluid hooren. Vervolgens wordt de toon weer sterker, bereikt een maximum (dat even groot is als zooeven, als we aannemen, dat elk punt zijne amplitudo behoudt), neemt weer af enz. Zooveel malen als het geluid dus onhoorbaar wordt, zooveel knopen zijn het oor gepasseerd.

Het is in de praktijk onuitvoerbaar, eene torenklok, die aan zware beugels vast is opgehangen, om hare as te laten draaien. Wat echter op hetzelfde neerkomt, is, dat de waarnemer de klok geheel rondgaat. Door dan het oor dicht langs het oppervlak te verplaatsen, kunnen de plaatsen van minimale toonsterkte wel bepaald worden. Strikt genomen heeft men slechts twee van die punten noodig, maar dan twee opeenvolgende. Is de boogafstand daarvan α° , dan zijn er $\frac{360}{\alpha}$ knoopmeridianen.

Het is verder duidelijk, dat deze knoopmeridianen geene vaste plaats op het oppervlak hebben, als de klok een zuiver omwentelingslichaam en volkomen homogeen is. Eén meridaan kan men willekeurig aannemen, de andere liggen dan op afstanden van α° daarvan verwijderd.

Bij het voorgaande dient opgemerkt te worden, dat ook bij een enkelvoudigen toon geene „knoopen” in den waren zin des woords voorkomen, daar de trillingen in de meridiaanvlakken, d. i. loodrecht op het oppervlak, aanleiding geven tot spanningen langs het oppervlak en daardoor weer eene heen- en weergaande beweging der knopen langs het oppervlak. We onderscheiden beide soorten van trillingen als *normale* en *tangentiale* trillingen. In het eenvoudigste geval,

dus bij 4 knoopmeridianen bewegen zich de knopen na $\frac{1}{4} T$ langs het oppervlak volgens de pijltjes in fig. 15, na $\frac{3}{4} T$ als in fig. 16, terwijl na $\frac{1}{2} T$ de knopen eene tangentielle snelheid 0 hebben; alsdan is echter de normale snelheid juist maximaal. *Plaatsen van absolute rust bestaan dus niet.*

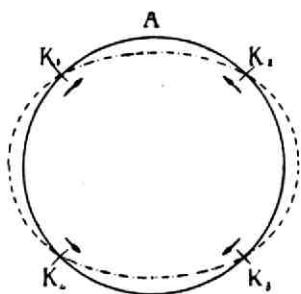


Fig. 15.

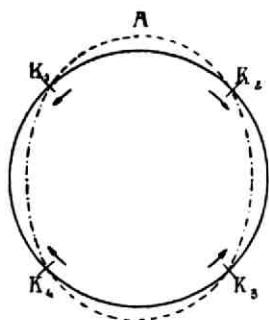


Fig. 16.

Uit het voorgaande volgt, dat terwijl de klok om hare as draait, voor den waarnemer de toonsterkte nooit nul kan worden, maar dat hij afwisselend maxima en minima zal hooren.

4°. De sub 3° gemaakte onderstelling, dat de klok een homogeen omwentelingslichaam is, is in de praktijk echter zelden of nooit vervuld. Daar de slagring een zeer belangrijk deel van eene klok uitmaakt, willen wij voorloopig alleen op de trillingen van dezen letten. De trillingen van een gesloten ring zijn experimenteel het eerst door CHLADNI¹⁾ en later door MELDE²⁾ onderzocht. Wanneer zulk een ring door transversale trillingen in zijn vlak zijn grondtoon geeft, verdeelt hij zich in 4 deelen op dezelfde wijze als fig. 12 dit

1) CHLADNI, Die Akustik § 100.

2) MELDE, Akustik § 59.

vertoont. Uit de formule voor den trillingstijd (zie blz. 33).

$$\tau = \frac{4 \pi a^2}{c s (s^2 - 1)} \sqrt{\frac{\rho (s^2 + 1)}{q}}$$

volgt dat het aantal trillingen per seconde omgekeerd evenredig is met den vierkantswortel uit de dichtheid. Stellen we ons nu een ring voor, waarvan, gelijk bij den slagring van eene klok meestal het geval zal zijn, de massa niet volkomen gelijk om de as is verdeeld, bijv. een homogenen ring, die in een punt A eene verzwaring heeft (fig. 17).

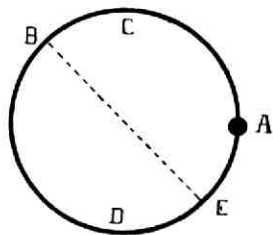


Fig. 17.

Wordt de ring nu op dezelfde wijze aangeslagen als waardoor hij zonder verzwaring zijn grondtoon zou geven, dan zal hij nu *twee* tonen geven, die weinig in trillingstijd verschillen. Immers, denken wij ons den ring aangeslagen in een willekeurig punt B, dan zullen langs den omtrek de trillingen zich voortplanten in de richtingen B C A en B D A. Was de verzwaring in A er niet, dan zouden deze trillingen elkander ontmoeten in het punt E, diametraal tegenover B, daar interfereeren en den ring in staande trilling brengen. Nu is het echter duidelijk, dat de trillingen in de helft B D E kleinere periode zullen hebben dan in de helft B C E, omdat in de laatste de dichtheid grooter is door de ongelijke massaverdeeling. Het gevolg is dus, dat zich *twee* verschillende golfbewegingen door den ring zullen voortplanten, die weinig in periode zullen verschillen, als de aangebrachte verzwaring dus de onregelmatigheid in de massaverdeeling gering is. Er zullen dus twee tonen ontstaan, die weinig in hoogte verschillen en deze zullen zwe-

vingen veroorzaken. In het algemeen zal een knoop van den eenen toon samenvallen met een buik van den anderen,¹⁾ zoodat de knopen van den eersten midden tusschen de buiken van den tweeden liggen en omgekeerd.

Wordt nu de ring aangeslagen juist op eene plaats, waar de eene toon een knoop geeft, dan zal deze toon uitblijven, daarentegen de andere zich zoo sterk mogelijk doen hooren. Maar dan blijven natuurlijk ook de zwevingen weg. Geeft de ring nu zijn grondtoon, als men hem op eene *willekeurige* plaats aanslaat, dan zullen er 4 knopen voor den eenen toon en ook 4 voor den anderen (iets hooger en lager) toon te voorschijn komen. Men kan dan den ring op 8 plaatsen aanslaan zonder zwevingen te hooren.

In het bovenstaande ligt eene methode opgesloten om het aantal knopen te bepalen. Slaat men toch den ring aan in een willekeurig punt, dan zal men zwevingen waarnemen. Heeft men hem echter in een zoodanig punt aangeslagen, dat er geene zwevingen gehoord worden, dan is de plaats van aanslaan een knoop. Het is duidelijk, dat men kan volstaan met de bepaling van twee opeenvolgende dergelijke plaatsen. Bedraagt de afstand daarvan α° , dan is blijkbaar het aantal knopen der betrokken trillingswijze $\frac{360}{2\alpha}$.

Daar zonder twijfel de slagring een integreerend deel van eene klok is, is het te verwachten, dat de genoemde verschijnselen zich in hoofdzaak ook moeten voordoen bij eene klok, die niet volkomen symmetrisch is. Is de asymmetrie *te* groot, dan zullen de zwevingen onaangenaam en te talrijk zijn om als zoodanig geconstateerd te worden. De klok is dan *valsch*.

Men begrijpt, dat deze methode van RAYLEIGH de aangewezen is voor het onderzoek van groote klokken.

1) Zie BOSSCHA—VAN SCHAİK, Natuurkunde III 5de dr. p. 192.

Ik heb haar toegepast op de klokken *B*, *dis* en *fis* *I*. Daar deze echter voor het oor niet van alle kanten bereikbaar zijn, heb ik mij niet altijd zekerheid kunnen verschaffen, of, eenmaal een afstand tusschen 2 knoopen bepaald zijnde, diezelfde afstand overal op het overige gedeelte van den omtrek gevonden zou worden. Gelijk reeds in de inleiding gezegd is, kon van een dergelijk onderzoek in het carillon door het gedruisch in de omgeving en door de sterke luchtstroomingen niets komen; bovendien kon geene dezer klokken gemakkelijk bereikt worden in eene houding, geschikt om met het oor rustig in de nabijheid ervan te kunnen blijven.

Wij zullen nu overgaan tot de bespreking der *knoopparallel*len.

Zij *A B C* eene meridiaandoorsnede eener klok (fig. 18). Wanneer deze een omwentelingsoppervlak is, zijn alle meridiaandoorsneden gelijk en gelijkvormig. Twee van die doorsneden, dicht bij elkander gelegen, snijden uit de klok een strookje, dat te beschouwen is als eene gebogen staaf, die in *A* is vastgeklemd (aan den bodem der klok) en waarvan het uiteinde *C* bewegelijk is in het meridiaanvlak. Wordt deze strook bij *C* aangeslagen, dan geraakt zij in transversale trilling. De trillingen van alle strooken bij elkander, met uitzondering van die, welke juist op een knoopmeridiaan liggen, vormen de reeds beschouwde normale trillingen der klok. Geeft de klok haar grondtoon, dan trilt elke strook op de eenvoudigste wijze, d. w. z. heeft alleen in *C* een buik, alleen in *A* een knoop. De boog *A B C* is dan $\frac{1}{4}$ golfengte en

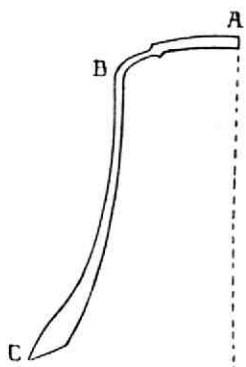


Fig. 18.

de trillingswijze van den strook wordt weergegeven door fig. 19.

Bij eene minder eenvoudige trillingswijze zal de strook echter een of meer knopen tusschen A en C vertoonen (fig. 20). Zijn nu alle strooken volkomen aan

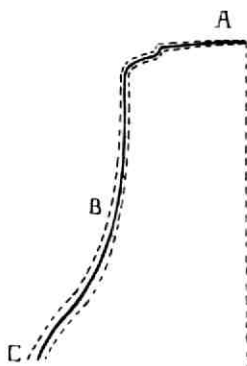


Fig. 19.

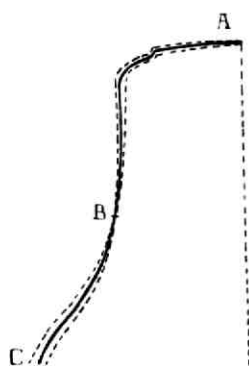


Fig. 20.

elkander gelijk, zooals we hebben aangenomen, dan zal elke strook, zoodra hij bereikt wordt door de trillende beweging, die zich langs den omtrek der klok voortplant, op dezelfde wijze gaan trillen als de eerste, zij zullen dus alle een knoop krijgen op denzelfden afstand van het vrije uiteinde C. Die knopen liggen dus op *cirkels* en vormen de *knoopparallellellen*.

Voldoet de klok niet geheel aan de genoemde voorwaarden, dan zullen de knoopparallellellen weinig van cirkels afwijken en geene vlakke krommen zijn.

De knoopparallellellen kan men op soortgelijke wijze bepalen als de knoopmeridianen (zie 3°). Geeft de klok een enkelvoudigen toon, dan zal, wanneer er geen knoopparallel aanwezig is, de intensiteit geleidelijk moeten afnemen voor een waarnemer, die zich met het oor langs een meridiaan van onderen naar boven verplaatst. Ontmoet hij echter een minimum dan is

daar een knoop. Men begrijpt licht, dat dit onderzoek aan grootere bezwaren onderhevig was dan dat der knoopmeridianen. De vorm en afmetingen der klokken en de beperkte ruimte waarin zij opgehangen waren, maakten eene eenigszins vlugge, geleidelijke verplaatsing van het oor dicht langs het oppervlak zeer lastig. Bovendien meen ik, dat eene plaats van minimale toonsterkte in deze richting gemakkelijker aan het gehoor ontsnapt dan wanneer men zich langs den omtrek (op eenzelfde hoogte) verplaatst. Te verwonderen is dit niet, omdat in het laatste geval op een minimum weer het oorspronkelijke maximum volgt, terwijl in het eerste geval boven een knoop een veel zwakker maximum ligt dan er onder, door de afnemende amplitudo.

Een en ander maakt de vaststelling der knoopparallel en onzeker. Het is mij nooit gelukt bij een bepaalden toon meer dan één parallel te constateeren. Voorts is het duidelijk, dat zoo er meer dan één is, zij niet op onderling gelijke afstanden zullen liggen — zooals de meridianen — omdat de trillende strooken elk voor zich een onregelmatigen vorm hebben. Wellicht zou met zekerheid een grooter aantal knoopparallel en gevonden worden bij zeer intensief aanslaan met den klepel; er ontstaan dan zeer hooge boven-tonen met waarschijnlijk meer dan één parallel. Het vaststellen van minimale intensiteit dezer tonen zou dan met resonatoren misschien wel gelukken. Met het ongewapend oor is mij dit niet mogelijk geweest.

In de voorgaande algemeene beschouwingen is een en ander medegedeeld over normale en tangentiale trillingen, de daarmee in verband staande *relatieve* beteekenis van den term „knooplijn”, alsmede over de plaats der knoopparallel en. Hoewel de onderzochte klokken voor eene mathematische behandeling ten eenenmale ongeschikt zijn, kunnen wij toch eenige

gewichtige eigenschappen van hare trillingswijzen uit klokken van zeer vereenvoudigden vorm afleiden. Steeds zullen we daarbij de klok opvatten als eene in physischen zin oneindig dunne schaal.

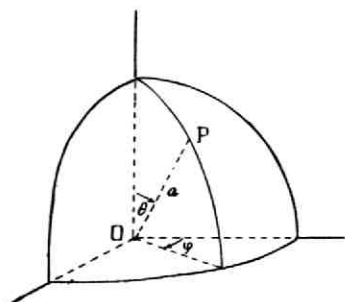


Fig. 21.

Denken we ons dan voor-
eerst eene klok, die bestaat
uit eene bolvormige schaal ¹⁾.
Een punt P op het boloppervlak
zij bepaald door de coördinaten
 a , θ en ϕ , waarin a de straal
van den bol is (fig. 21). We
vooronderstellen verder, dat eene
willekeurige kromme lijn op
het oppervlak getrokken, gedurende
de vervormingen,

waarmee de trilling gepaard gaat,
niet van lengte verandert. Noemen
we nu de coördinaten na de
vervorming $a + a'$, $\theta + \theta'$ en
 $\phi + \phi'$, waarin a' , θ' en ϕ'
klein zijn, dan is de lengte van
een boogelement ds op het
oppervlak vóór de vervorming
bepaald door:

$$ds^2 = (a \cdot d\theta)^2 + (a \sin \theta \cdot d\phi)^2$$

en erna door:

$$ds^2 = \{(a + a')(d\theta + d\theta')\}^2 + \{(a + a') \sin(\theta + \theta') d\phi + d\phi'\}^2 + da'^2$$

Uit deze twee gelijkheden volgt,
bij verwaarloozing van de tweede
machten van a' , θ' en ϕ' :

$$(1) \quad a \cdot d\theta \cdot d\theta' + a' \cdot d\theta^2 + a' \sin^2 \theta \cdot d\phi^2 + \\ + a \sin \theta \cos \theta \cdot \theta' \cdot d\phi^2 + a \sin^2 \theta \cdot d\phi \cdot d\phi' = 0.$$

¹⁾ Zie RAYLEIGH, Infinitesimal bending of surfaces of revolution, Proc. London. Math. Soc. XIII. p. 4—16. 1881.

Hierin is :

$$d \theta' = \frac{d \theta'}{d \theta} d \theta + \frac{d \theta'}{d \phi} d \phi$$

en

$$d \phi' = \frac{d \phi'}{d \theta} d \theta + \frac{d \phi'}{d \phi} d \phi$$

Substitutie van deze waarden in (1) en deeling door a geeft :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d \theta'}{d \theta} + \frac{a'}{a} \right) d \theta^2 + \left(\frac{d \theta'}{d \phi} + \frac{d \phi'}{d \theta} \sin^2 \theta \right) d \theta \cdot d \phi + \\ & + \left(\frac{a'}{a} \sin^2 \theta + \theta' \sin \theta \cos \theta + \frac{d \phi'}{d \phi} \sin^2 \theta \right) d \phi^2 = 0 \end{aligned}$$

Aan deze vergelijking moet voldaan worden door elke waarde van $d \theta$ en $d \phi$, zoodat de coëfficiënten elk afzonderlijk gelijk aan nul moeten zijn. Derhalve :

$$(2) \quad \frac{d \theta'}{d \theta} + \frac{a'}{a} = 0$$

$$(3) \quad \frac{d \theta'}{d \phi} + \frac{d \phi'}{d \theta} \sin^2 \theta = 0$$

$$(4) \quad \frac{a'}{a} + \theta' \operatorname{ctg} \theta + \frac{d \phi'}{d \phi} = 0$$

Elimineeren we tusschen (2), (3) en (4) a' , dan krijgen we eerst uit (2) en (4) :

$$\begin{aligned} (5) \quad \frac{d \phi'}{d \phi} &= \frac{d \theta'}{d \theta} - \theta' \operatorname{ctg} \theta = \sin \theta \frac{d \theta'}{\sin \theta d \theta} - \cos \theta \sin \theta \frac{\theta'}{\sin^2 \theta} \\ &= \sin \theta \frac{d}{d \theta} \left[\frac{\theta'}{\sin \theta} \right] \end{aligned}$$

(3) gedeeld door $\sin \theta$ geeft dan verder:

$$(6) \quad \frac{d}{d\phi} \left(\frac{\theta'}{\sin \theta} \right) + \sin \theta \frac{d\phi'}{d\theta} = 0$$

en (5) wordt:

$$(7) \quad \frac{d\phi'}{d\phi} - \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\theta'}{\sin \theta} \right) = 0$$

Daar voorts:

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} = \frac{d}{dl (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta)},$$

gaan de laatste twee vergelijkingen over in:

$$(8) \quad \frac{d}{d\phi} \left(\frac{\theta'}{\sin \theta} \right) + \frac{d\phi'}{dl (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta)} = 0$$

$$(9) \quad \frac{d\phi'}{d\phi} - \frac{d}{dl (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta)} \left(\frac{\theta'}{\sin \theta} \right) = 0$$

Elk van beide functies $\frac{\theta'}{\sin \theta}$ en ϕ' voldoet aan de differentiaalvergelijking der tweede orde:

$$(10) \quad \frac{d^2 x}{(dl \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta)^2} + \frac{d^2 x}{d\phi^2} = 0$$

zooals blijkt door (8) naar ϕ en (9) naar $l (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta)$ te differentieeren (en omgekeerd) en de beide komende vergelijkingen op te tellen.

Daar x eene periodieke functie van ϕ is, kunnen we haar ontwikkeld denken volgens de reeks van FOURIER. Elke term dezer reeks kan voorgesteld worden door $K_s \cos s\phi$ of $K'_s \sin s\phi$ en moet afzonderlijk aan de laatste differentiaalvergelijking voldoen.

Stellen we dus:

$$x = K \cos s \phi \quad \text{of} \quad x = K \sin s \phi,$$

dan wordt (10)

$$\frac{d^2 x}{(d l \operatorname{tg}^{1/2} \theta)^2} - s^2 x = 0$$

Dit is eene differentiaalvergelijking van den vorm:

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = s^2 x,$$

waarvan de algemeene oplossing is

$$x = C_1 e^{sz} + C_2 e^{-sz}$$

derhalve:

$$x = C_1 \operatorname{tg}^{s 1/2} \theta + C_2 \operatorname{ctg}^{s 1/2} \theta$$

waarin C_1 en C_2 onafhankelijk van θ zijn.

Stellen we nu:

$$\begin{aligned} \phi' &= (A \operatorname{tg}^{s 1/2} \theta + B \operatorname{ctg}^{s 1/2} \theta) \cos s \phi \quad \text{of} \\ \phi' &= (A \operatorname{tg}^{s 1/2} \theta + B \operatorname{ctg}^{s 1/2} \theta) \sin s \phi \end{aligned}$$

wat we korter willen schrijven als:

$$(11) \quad \phi' = \left(A \operatorname{tg}^{s 1/2} \theta + B \operatorname{ctg}^{s 1/2} \theta \right) \frac{\cos s \phi}{\sin s \phi}$$

dan wordt:

$$\begin{aligned} \frac{d \phi'}{d l \operatorname{tg}^{1/2} \theta} &= \frac{d \phi'}{d \operatorname{tg}^{1/2} \theta} : \frac{d l \operatorname{tg}^{1/2} \theta}{d \operatorname{tg}^{1/2} \theta} = \\ &= \left[s (A \operatorname{tg}^{s-1 1/2} \theta - B \operatorname{ctg}^{s+1 1/2} \theta) \operatorname{tg}^{1/2} \theta \right] \frac{\cos s \phi}{\sin s \phi} = \\ &= s \left(A \operatorname{tg}^{s 1/2} \theta - B \operatorname{ctg}^{s 1/2} \theta \right) \frac{\cos s \phi}{\sin s \phi} \end{aligned}$$

Substitueeren we dit in (8) dan komt er, na integratie naar ϕ :

$$(12) \quad \frac{\theta'}{\sin \theta} = \frac{-\sin s \phi}{+\cos s \phi} \left(A \operatorname{tg}^{s-1/2} \theta - B \operatorname{ctg}^{s-1/2} \theta \right)$$

De waarden van ϕ' en θ' gesubstitueerd in (4) geven eindelijk:

$$(13) \quad \frac{a'}{a} = -\frac{\sin s \phi}{\cos s \phi} \left\{ A(s + \cos \theta) \operatorname{tg}^{s-1/2} \theta + B(s - \cos \theta) \operatorname{ctg}^{s-1/2} \theta \right\}$$

Stellen we nu $s = 1$, dan worden (11) na vermenigvuldigen met $\sin \theta$, (12) en (13) respectievelijk:

$$\phi' \sin \theta = \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \left\{ A + B - (A - B) \cos \theta \right\}$$

$$\theta' = -\frac{\sin \phi}{\cos \phi} \left\{ A - B - (A + B) \cos \theta \right\}$$

$$\frac{a'}{a} = -\frac{\sin \phi}{\cos \phi} (A + B) \sin \theta$$

Gaan we nu de verschillende waarden van a' na voor verschillende waarden van s ; volgens (13) krijgen we dan voor:

$$s=0 \quad a'=0 \quad \text{of} \quad a' = -a(A - B) \cos \theta$$

$$s=1 \quad a' = a(A + B) \sin \theta \sin \phi \quad \text{of} \quad a' = -a(A + B) \sin \theta \cos \phi$$

$$s=n \quad a' = a \sin n \phi \left\{ A(n + \cos \theta) \operatorname{tg}^{n-1/2} \theta + B(n - \cos \theta) \operatorname{ctg}^{n-1/2} \theta \right\}$$

Hieruit zien we, dat zoodra $s \geq 2$, a' de waarde ∞ krijgt voor $\theta = 0$ of $\theta = \pm \pi$, tenzij $A = 0$ en $B = 0$.

Is dus $A \neq 0$ en $B \neq 0$, dan zijn er alleen verplaatsingen mogelijk voor $s = 0$ en $s = 1$, m. a. w. dan is de bol rigide.

Voeren we nu de voorwaarde in, dat we slechts te doen hebben met een *gedeelte* van het boloppervlak, dat begrensd wordt door twee parallelcirkels, dan vervallen de polen, dat zijn de punten waarvoor $\theta=0$ en $\theta = -\pi$, dus dan kan a' nooit ∞ worden. Bij eene bolvormige *klok* is echter een der polen op het oppervlak gelegen, bijv. $\theta = 0$. Alsdan moet voor $\theta = 0$ toch a' eindig zijn. Hiervoor is noodig dat $B = 0$.

Onze oplossing gaat dan over in:

$$\phi' = A \operatorname{tg}^{s-1/2} \theta \cos s \phi$$

$$\theta' = -A \sin \theta \operatorname{tg}^{s-1/2} \theta \sin s \phi$$

$$a' = A a (s + \cos \theta) \operatorname{tg}^{s-1/2} \theta \sin s \phi.$$

Dit stel vergelijkingen leert ons, dat voor $\sin s \phi = 0$ alleen $\phi' \neq 0$, dus in alle meridiaanvlakken, waarvoor $\phi = \frac{n}{s} \pi$, is de verplaatsing *loodrecht* op het meridiaanvlak, d. i. *tangentiaal*. In alle meridiaanvlakken, waarvoor $\phi = \frac{n}{s} \cdot \frac{\pi}{2}$ is alleen $\phi' = 0$, dus geschiedt de beweging *in* het meridiaanvlak. Bovendien zien we nu, dat *waar de eerste verplaatsing nul is, de tweede maximaal is en omgekeerd*.

Langs den aequator is $\theta = 1/2 \pi$, dus $\phi' = A \cos s \phi$ en $\theta' = -A \sin s \phi$, zoodat daar de maximale verplaatsing *loodrecht* op het meridiaanvlak *even groot* is als die *in* het meridiaanvlak loodrecht op den voerstraal.

Ook bij gewone klokken zijn de normale en tangentiale trillingen van dezelfde orde.¹⁾

Beschouwen wij thans een oppervlak, dat reeds bij

¹⁾ MATHIEU, l. c.

den eersten aanblik overeenkomst vertoont met het (buiten)oppervlak eener werkelijke klok, n.l. eene omwentelingshyperboloïde met één blad, waarvan de keel bedekt is door eene vlakke, cirkelvormige plaat. Daartoe willen we eerst nagaan, hoever deze overeenkomst gaat. In fig. 22 stelt de dun getrokken lijn het profiel voor van eene klok, volgens de constructie door HARZER vermeld. De zware lijn stelt het buitenprofiel voor van de klok *f*s *I* op ongeveer $\frac{1}{15}$ der ware grootte.

Daar deze nagenoeg gelijkvormig is met de andere klokken, geldt de volgende beschouwing voor alle. Vooreerst zien we, dat de klok in vergelijking van hare opening volgens de genoemde constructie te kort en bijna overal veel te wijd is.

Nemen we nu aan, dat de dekplaat eene middellijn heeft $= d_2$,¹⁾ dan moet $OA = \frac{1}{2} d_2$ de halve bestaانبare as van de hyperbool worden en *A* de top. In de figuur is nu verder geconstrueerd die hyperbool, welke door het punt *P* gaat.

In de assenvergelijking der hyperbool:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

is nu voor het punt *P* alles bekend, behalve *b*. Daaruit vinden we dus voor de halve onbestaanbare as:

$$(1) \quad OB = b = \frac{a y}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

waarin $a = \frac{1}{2} d_2$, $y = h$, $x = \frac{1}{2} d_1$. Substitueeren we de waarden van d_2 , h en d_1 uit de tabel op blz. 18 in (1) dan komt er

$$b = 60,17.$$

¹⁾ Zie de notatie in de tabel op blz. 18.

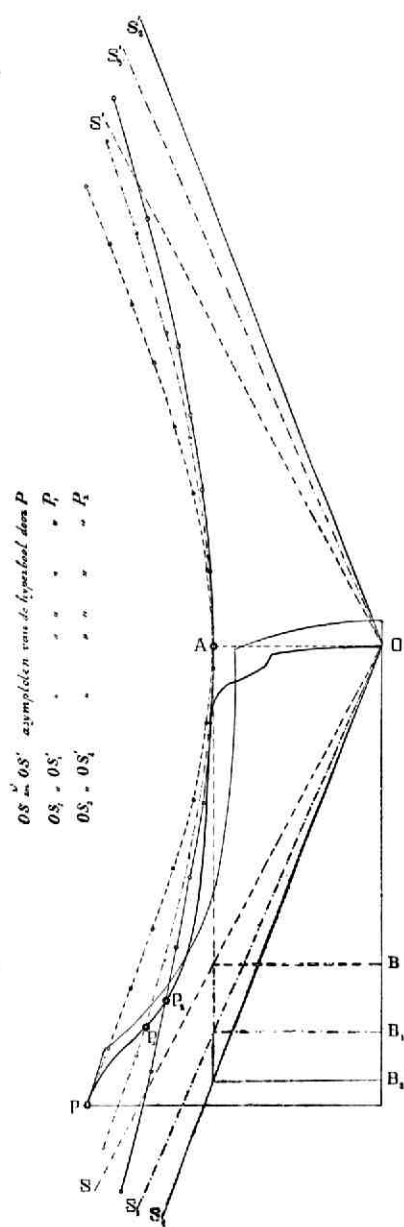


Fig. 22.

Nu a en b bekend zijn, zijn terstond de asymptoten te teekenen (OS en OS') en dan ook punt voor punt de hyperbool op deze asymptoten (door P gaande).

Op dezelfde wijze heb ik de hyperbool geconstrueerd door het punt P_1 , d. i. het punt waarvoor de middellijn $= d_3$.¹⁾ Daarvoor is de halve onbestaanbare as door OB_1 gelijk aan

$$b = 73,14$$

zoals gevonden wordt door voor de coördinaten van P_1 te zetten: $x = \frac{1}{2} d_3$, die weer in de tabel staat en $y =$ de loodlijn uit P_1 op de X -as, welke loodlijn door meting 72 blijkt te zijn.

Eindelijk is nog de hyperbool geconstrueerd die door P_2 gaat, d. i. het punt waarvoor de middellijn $= d_4$. Voor dit punt is n.l. $x = \frac{1}{2} d_4$ en y (door meting in de figuur) $= 67$. We vinden dan voor de halve onbestaanbare as OB_2 :

$$b = 82,42.$$

Uit de drie geteekende hyperbolen blijkt, dat het werkelijke buitenprofiel der klok veel meer van eene hyperbool heeft dan dat, hetwelk uit de constructie van HARZER volgt. De derde hyperbool, n.l. die door P_2 , valt voor een groot gedeelte nagenoeg samen met het werkelijke profiel. Juist bij den slagring is de afwijking vrij aanzienlijk en dit zal zeker van invloed zijn op de resultaten die de hierna volgende berekening (aan RAYLEIGH ontleend) levert. Bij eerste benadering kunnen we echter het buitenprofiel als eene hyperbool beschouwen en als we de klok verder als eene dunne schaal opvatten, bestaat zij derhalve in hoofdzaak uit eene halve omwentelings-hyperboloïde

¹⁾ Zie de notatie in de tabel op blz. 18.

met één blad. Voorts zal het afzien van de welving van den bodem op de resultaten van weinig invloed zijn.

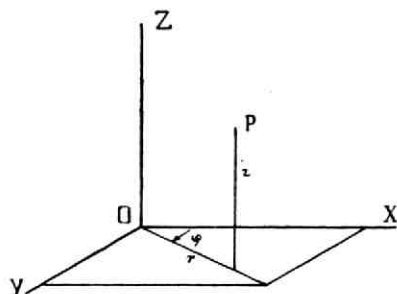


Fig. 23.

Wij bepalen een punt P op het oppervlak door de cylindrische coördinaten ϕ , r en z (fig. 23).¹⁾ De oorsprong wordt gekozen in het middelpunt der hyperbolische doorsnede, de Z -as langs de omwentelingsas, het $X O Y$ -vlak $\perp O Z$, de X - en Y -as $\perp$ elkander,

overigens willekeurig. (Zooals het assenstelsel geteekend is, moeten we ons de klok met hare opening naar boven gekeerd denken).

Het oppervlak onderga eene vervorming, waardoor de coördinaten van het punt P worden $\phi + \phi'$, $r + r'$, $z + z'$, waarin ϕ' , r' en z' weer zeer klein gedacht worden. De lengte van een boogelement ds op het oppervlak is vóór de vervorming bepaald uit:

$$ds^2 = r^2 d\phi^2 + dr^2 + dz^2$$

Verandert het boogelement door de vervorming niet van lengte, dan is ook:

$$ds^2 = (r + r')^2 (d\phi + d\phi')^2 + (dr + dr')^2 + (dz + dz')^2$$

Uit deze vergelijkingen volgt weder de betrekking tusschen ϕ' , r' en z' :

$$(1) \quad r^2 d\phi \cdot d\phi' + r r' d\phi^2 + dr \cdot dr' + dz \cdot dz' = 0,$$

¹⁾ Phil. Mag. 29, 1890.

indien we de tweede machten van ϕ' , r' en z' verwaarloozen. Hierin is :

$$d\phi' = \frac{d\phi'}{d\phi} d\phi + \frac{d\phi'}{dz} dz$$

$$dr' = \frac{dr'}{d\phi} d\phi + \frac{dr'}{dz} dz$$

$$dz' = \frac{dz'}{d\phi} d\phi + \frac{dz'}{dz} dz$$

en daar voorts r eene functie is van z alleen, omdat we te doen hebben met een omwentelings-oppervlak, is :

$$dr = \frac{dr}{dz} dz$$

Substitueeren we de waarden van $d\phi'$, dr' , dz' en dr in de vergelijking (1), dan komt er :

$$\begin{aligned} r d\phi^2 \left(r \frac{d\phi'}{d\phi} + r' \right) + d\phi dz \left(\frac{dz'}{d\phi} + r^2 \frac{d\phi'}{dz} + \frac{dr}{dz} \frac{dr'}{d\phi} \right) + \\ + dz^2 \left(\frac{dz'}{dz} + \frac{dr}{dz} \frac{dr'}{dz} \right) = 0 \end{aligned}$$

Aan deze vergelijking moet voldaan zijn voor elke waarde van $d\phi$ en dz , zoodat de coëfficiënten elk afzonderlijk gelijk aan nul moeten zijn. Derhalve :

$$(2) \quad r \frac{d\phi'}{d\phi} + r' = 0$$

$$(3) \quad \frac{dz'}{d\phi} + r^2 \frac{d\phi'}{dz} + \frac{dr}{dz} \frac{dr'}{d\phi} = 0$$

$$(4) \quad \frac{dz'}{dz} + \frac{dr}{dz} \frac{dr'}{dz} = 0$$

Elimineeren we r' eerst tusschen (2) en (3), dan komt er:

$$\frac{dz'}{dz} - \frac{dr}{dz} \frac{d}{dz} \left(r \frac{dr'}{d\phi} \right) = 0$$

en daarna tusschen (3) en (4):

$$\frac{dz'}{d\phi} + r^2 \frac{d\phi'}{dz} - r \frac{dr}{dz} \frac{d^2\phi'}{d\phi^2} = 0$$

Uit de laatste twee vergelijkingen elimineeren we nog z' door de eerste naar ϕ en de tweede naar z te differentieeren; dat geeft, daar $\frac{dr}{dz}$ geene functie van ϕ en ook r geene functie van ϕ is:

$$\frac{d^2 z'}{dz d\phi} - \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 \frac{d^2 \phi'}{d\phi^2} - r \frac{dr}{dz} \frac{d^3 \phi'}{d\phi^2 dz} = 0$$

en

$$\frac{d^2 z'}{dz d\phi} + 2r \frac{dr}{dz} \frac{d\phi'}{dz} + r^2 \frac{d^2 \phi'}{dz^2} - \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 \frac{d^2 \phi'}{d\phi^2} - r \frac{dr}{dz} \frac{d^3 \phi'}{d\phi^2 dz} = 0$$

Derhalve na eliminatie van $\frac{d^2 z'}{dz d\phi}$ (waarbij ook $\frac{d^3 \phi'}{d\phi^2 dz}$ wegvalt),

$$2r \frac{dr}{dz} \frac{d\phi'}{dz} + r^2 \frac{d^2 \phi'}{dz^2} - r \frac{d^2 r}{dz^2} \frac{d^2 \phi'}{d\phi^2} = 0.$$

Voor de eerste twee termen schrijven wij $\frac{d}{dz} \left[r^2 \frac{d\phi'}{dz} \right]$, dan komt er:

$$\frac{d}{dz} \left[r^2 \frac{d\phi'}{dz} \right] - r \frac{d^2 r}{dz^2} \frac{d^2 \phi'}{d\phi^2} = 0$$

Evenals in het voorgaande geval kunnen we ϕ' weder evenredig stellen aan $\cos s\phi$ of $\sin s\phi$. Stellen we

dus $\phi' = A \cos s \phi + B \sin s \phi$, dan gaat de laatste vergelijking na vermenigvuldiging met r^2 over in:

$$r^2 \frac{d}{dz} \left[r^2 \frac{d\phi'}{dz} \right] + s^2 r^3 \frac{d^2 r}{dz^2} \phi' = 0$$

Uit deze differentiaalvergelijking moeten we nu ϕ' als functie van z bepalen. Het verband tusschen r en z is voor de omwentelingshyperboloïde:

$$\frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

Derhalve:

$$r \frac{dr}{dz} = \frac{a^2 z}{b^2} \text{ en } r \frac{d^2 r}{dz^2} + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 = \frac{a^2}{b^2}, \text{ waaruit } r^3 \frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{a^4}{b^2}$$

Onze differentiaalvergelijking wordt dus:

$$(5) \quad r^2 \frac{d}{dz} \left(r^2 \frac{d\phi'}{dz} \right) + \frac{s^2 a^4}{b^2} \phi' = 0$$

Substitueeren we: $z = b \operatorname{tg} \psi$ en $r = a \sec \psi$

$$\text{dan wordt: } \frac{d\psi}{dz} = \frac{1}{b \sec^2 \psi} = \frac{a^2}{b r^2}$$

$$\text{derhalve } r^3 \frac{d}{dz} = r^2 \frac{d}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{dz} = \frac{a^2}{b} \cdot \frac{d}{d\psi}$$

De vergelijking (5) gaat dus over in:

$$\frac{a^4}{b^2} \frac{d}{d\psi} \left(\frac{d\phi'}{d\psi} \right) + \frac{s^2 a^4}{b^2} \phi' = 0 \quad \text{of}$$

$$\frac{d^2 \phi'}{d\psi^2} + s^2 \phi' = 0$$

De algemeene oplossing hiervan is:

$$(6) \quad \phi' = A \cos s \psi + B \sin s \psi$$

Daar de cirkelvormige plaat alleen vervormingen kan ondergaan in eene richting loodrecht op haar vlak, moet voor deze

$$\phi = 0 \quad \text{en} \quad r' = 0$$

zijn en dit geldt dan óók voor de keel der hyperboloïde, d. w. z. voor $z = 0$ (of voor $\psi = 0$) moet ook $\phi' = 0$, derhalve moet in (6) $A = 0$ zijn en we krijgen:

$$\phi' = B \sin s \psi$$

en daar we ϕ' evenredig gesteld hebben aan $\cos s \phi$, komt er met weglating van een constanten factor:

$$(7) \quad \phi' = \sin s \psi \cdot \cos s \phi$$

In verband met (2) en (3) vinden we nu verder:

$$(8) \quad r' = -r \frac{d\phi'}{d\phi} = r \sin s \psi \cdot \cos s \phi \quad \text{en}$$

$$(9) \quad z' = \int \left(-r^2 \frac{d\phi'}{dz} - \frac{dr}{dz} \frac{dr'}{d\phi} \right) d\phi$$

$$\text{waarin: } \frac{d\phi'}{dz} = \frac{d\phi'}{d\psi} \frac{d\psi}{dz} = s \cos s \psi \cdot \cos s \phi \frac{a^2}{b r^2}$$

$$\frac{dr}{dz} = \frac{dr}{d\psi} \frac{d\psi}{dz} = \frac{a}{b} \sin \psi$$

$$\frac{dr'}{d\phi} = s^2 r \sin s \psi \cdot \cos s \phi = s^2 a \sec \psi \sin s \psi \cdot \cos s \phi$$

Substitutie van deze waarden in (9) geeft:

$$(10) \quad z' = -\frac{a^2}{b} \left(\cos s \psi + s \operatorname{tg} \psi \sin s \psi \right) \sin s \phi$$

Het verband tusschen de verplaatsingen ϕ' , r' en z' en de coördinaten is derhalve volgens (7), (8) en (10):

$$\phi' = \sin s \psi \cos s \phi$$

$$r' = s r \sin s \psi \sin s \phi$$

$$z' = -\frac{a^2}{b} \left(\cos s \psi + s \operatorname{tg} \psi \sin s \psi \right) \sin s \phi$$

Hieruit zien we, als we r eene zekere waarde geven, dus voor een bepaalden parallelcirkel, dat ϕ' en r' nooit tegelijk nul kunnen zijn en evenmin ϕ' en z' . Er is dus geen parallelcirkel aan te wijzen, waar de tangentiale en de normale verplaatsing tegelijk nul zijn, m. a. w. *Punten van ABSOLUTE rust kunnen bij de trillende beweging der klok niet voorkomen.* Voor die waarden van s evenwel, waarvoor $\sin s \phi = 0$, dus in een zeker aantal meridiaanvlakken is de normale beweging nul, dus blijft een punt op den parallelcirkel waarop het ligt. Zoo kunnen we dan spreken van *knoopcirkels*. Evenzoo blijven alle punten waarvoor $\cos s \phi = 0$ in hun eigen meridiaanvlak; zij vormen de *knoopmeridianen*.

Komt een punt P door eene zeer kleine verplaatsing langs zijn meridiaan in P', gelegen op de raaklijn in P, dan is blijkbaar (fig. 24).

$$\frac{r'}{r} = \frac{dr}{dz}$$

In dit geval geschiedt dus de verplaatsing in de richting der meridiaankromme en is de normale beweging dus nul. Dit is derhalve de conditie voor het ontstaan der knoopparallelle. Zij laat zich schrijven in den vorm:

$$2 s \operatorname{tg} s \psi \left(\sin^2 \psi + \frac{b^2}{a^2} \right) = - \sin 2 \psi.$$

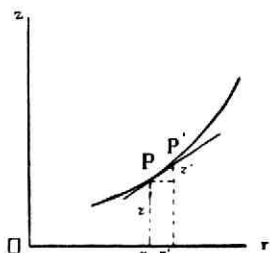


Fig. 24.

De grenzen van $z (= b \operatorname{tg} \psi)$ zijn 0 en ∞ , derhalve moet ψ liggen tusschen 0 en $\frac{\pi}{2}$, zoodat het tweede lid zeker negatief is. Hiervoor is dus noodig dat $\operatorname{tg} s \psi$ negatief is.

Voor $s = 2$ gaat de vergelijking over in

$$1 + 2 \sin^2 \psi + 4 \frac{b^2}{a^2} = 0.$$

Hieraan voldoet geene bestaanbare waarde van ψ .

Voor $s = 3$ komt er:

$$6 \operatorname{tg} 3 \psi \left(\sin^2 \psi + \frac{b^2}{a^2} \right) + \sin 2 \psi = 0,$$

waarin $\frac{\pi}{2} < 3 \psi < \pi$, dus ψ tusschen 30° en 60° .

Deze vergelijking is, als we $\frac{b^2}{a^2} = p$ stellen, te herleiden tot

$$8 \sin^4 \psi - 4 (1 - 3p) \sin^2 \psi - 9p - 1 = 0,$$

waaruit

$$\sin^2 \psi = \frac{1}{4} (1 - 3p \pm \sqrt{3 + 12p + 9p^2}).$$

Het — teeken vervalt, daar p positief is. Gemakkelijk vindt men hieruit:

$$(1) \quad \operatorname{tg}^2 \psi = 1 + 2 \sqrt{\frac{3p + 1}{3p + 3}}$$

De waarde van ψ en daarmee ook de plaats van den knooppunt op de hyperboloïde hangt dus af van p . Nemen we voor de a en b de waarden van blz. 85, nl. $a = 31$ en $b = 73,14$, dan wordt $p = \frac{b^2}{a^2} = 5,5665$, en

$$\operatorname{tg}^2 \psi = 1 + 2 \sqrt{\frac{17,6995}{19,6995}} = 2,89576$$

waaruit

$$\psi = 59^\circ 33' 33''$$

Nemen we $b = 60,17$ (blz. 84), dan wordt $p = 3,7674$ en

$$\begin{aligned} t g^2 \psi &= 2,85490 \\ \psi &= 59^\circ 22' 52'' \end{aligned}$$

Nemen we eindelijk nog $b = 82,42$, dan wordt $p = 7,0775$

$$\begin{aligned} \text{en} \quad t g^2 \psi &= 2,91572 \\ \psi &= 59^\circ 38' 44'' \end{aligned}$$

• We zien dus, dat ψ weinig verandert, wanneer de assenverhouding en daarmee ook de gedaante der hyperboloïde vrij sterk verandert. Inderdaad blijkt uit (1) dat ψ voor matige waarden van p steeds in den buurt van 60° blijft en tot deze waarde nadert, naarmate p tot ∞ nadert. De plaats van den aldus gevonden knoopcirkel zal dus weinig afhankelijk zijn van den vorm der hyperboloïde. Ten naastenbij vinden we voor de r van dezen cirkel derhalve $a \sec 60^\circ = 2a$. Hieruit volgt, dat deze knoopcirkel buiten het eigenlijke oppervlak der klok zou moeten liggen, daar de grootste r die voorkomt, nl. die van de opening $\frac{109}{87}a$ is. (Zie tabel blz. 18).

Dat het werkelijk gedrag eener klok anders zal zijn, dan dat van eene met zeer dunnen, overal even dikken wand, is te verwachten. Inderdaad heb ik bij sommige trillingswijzen een knooppaarsel gevonden.

Op blz. 73—74 is besproken hoe in het algemeen bij elken toon, die eene klok voortbrengt, tengevolge van eene geringe asymmetrie zwevingen zullen ontstaan en hoe men door deze zwevingen kan komen tot het aantal knoopmeridianen, dat bij den bedoelden toon behoort. Wij hebben gezien, dat men daartoe slechts de plaatsen behoeft vast te stellen, waar de zwevingen uitblijven, dus waar de intensiteit van den

toon (nagenoeg) onveranderd blijft. Volgen de zwevingen elkaar niet te langzaam op, dan heeft deze waarneming op zichzelf weinig bezwaar. Maar wanneer de bedoelde toon vergezeld gaat van een of meer andere tonen en men geen gebruik kan maken van een resonator om hem beter afzonderlijk te hooren en daardoor gemakkelijker veranderingen in zijne sterkte te constateeren, wordt het al aanstonds lastig, zoo niet onmogelijk, uit te maken, of de toonsterkte standvastig is of niet. Voornamelijk zal dit bezwaar gelden 1° wanneer de bedoelde toon zwak is met betrekking tot de overige; 2° wanneer hij met een of meer der bijkomstige tonen consoneert. Laat bijv. de geobserveerde toon *c* zijn en het octaaf *c'* een bijkomstige toon. Voert nu een van beide zwevingen uit, dan is het, althans zonder resonator, niet uit te maken, of de zwevingen van *c* of van *c'* afkomstig zijn; bovendien is het nog mogelijk, dat zoowel grondtoon als octaaf, elk afzonderlijk, vrij zijn van zwevingen, terwijl ze, niet volkomen consoneerende, tezamen toch zwevingen zullen geven langs den geheelen omtrek der klok, waardoor dus het criterium voor de aanwezigheid van een knoopmeridiaan verloren gaat. Vormt de geobserveerde toon met den bijkomstigen eene minder eenvoudige consonantie (quint, quart, groote terts enz.) dan geldt het bezwaar in mindere mate, omdat de zwevingen dan veel minder sterk zijn dan met een octaaf. Maar de moeilijkheid wordt natuurlijk met elken bijkomenden toon grooter. Het spreekt dus vanzelf, dat het onderzoek van de klokken *B*, *dis* en *fis*, waarbij het aantal bijkomstige tonen resp. 7, 6 en 5 bedroeg (zie tabel blz. 63) zeer groote moeilijkheden meebracht en dat de resultaten niet volledig zijn.

Wat de bepaling van de knoopparallellel betreft, de moeilijkheid bestond hier voornamelijk in het aan-

slaan der klok langs de geheele hoogte en in het voldoende naderen van de aangeslagen plaats met het oor. Daar de plaatsbepaling van een knoopparallel neerkomt op het vaststellen van eene minimale intensiteit, kan de aanwijzing slechts bij benadering plaats hebben. Bovendien is de mogelijkheid niet buitengesloten, dat er bij een bepaalden toon een of meer knoopparallelten aanwezig waren, maar waarvan ik, bij verplaatsing langs een meridiaan, na eene intensiteitsvermindering geene vermeerdering heb kunnen waarnemen, hoewel deze toch aanwezig kon zijn, maar in zoo geringe mate, dat de bewuste toon overheerscht werd door een of meer andere.

B.

Van den ondertoon *A* heb ik geene meridianen kunnen bepalen, omdat deze toon alleen voldoende duidelijk gehoord werd bij een klepelslag, dus bij aanslaan van het oppervlak in slechts twee diametraal gelegen punten, terwijl het langs den geheelen omtrek moet worden onderzocht.

Zwevingen (en haar wegblijven) heb ik slechts duidelijk kunnen waarnemen en tellen bij de tonen: *B* (13 in 5 sec.), *d* (1 per sec.), *d'* (7 in 5 sec.) en *e'* (zeer langzaam, ongeveer 2 in 5 sec.). Bij de overige kon ik slechts een egaal geluid hooren, of de zwevingen verdwenen nergens geheel.

Toon	<i>B</i>	<i>d</i>	<i>b-</i>	<i>d'</i>	<i>e'</i>	<i>fis'</i>	<i>fis''</i>
Aantal meridianen . .	4	4	?	6	6	8?	?
„ parallellen . .	0	0	1	1	1	—	—

De parallel van *b* lag ongeveer 69 c.M. van den bovenrand der klok af, die van *d'* 60 en van *e'* 52 c.M. Deze getallen zijn genomen als gemiddelden

van twee plaatsen, waar de intensiteit ongeveer dezelfde was.

dis.

Voor den ondertoon (*cis*) geldt hetzelfde als voor dien van *B*. Het ontstaan en verdwijnen van zwevingen was slechts goed waar te nemen bij de tonen *dis* (10 in 5 sec.), *dis'* (8 in 5 sec.) en *gis'* (6 in 5 sec.)

Toon	<i>dis</i>	<i>dis'</i>	<i>fis'</i>	<i>gis'</i>	<i>gis''</i>
Aantal meridianen	4	6	6?	6	?
„ parallellen	0	1	1	0	0

Het aantal meridianen voor *fis'*, 6, heb ik niet waargenomen, maar is toch vrij zeker, daar dit getal ook behoort bij den voorgaanden, zoowel als bij den volgende toon. De parallel van *dis'* lag ongeveer 45 c.M. beneden den bovenrand, die van *fis'* 33 c.M.

fis I.

Duidelijk waarneembaar waren hier de zwevingen alleen van *fis* (7 in 5 sec.), *a* (ongeveer 4 in 5 sec.), *b'* (1 in 2 sec.) en *gis'''* (ongeveer 1 per sec.)

Toon	<i>fis</i>	<i>a</i>	<i>fis'</i>	<i>a'</i>	<i>b'</i>	<i>b''</i>	<i>cis'''</i>
Aantal meridianen	4	4	?	?	6	?	8
„ parallellen	0	0	1	1	0	0	0

De parallel van *fis'* lag ongeveer 55 c.M. beneden den bovenrand, die van *a'* 38 c.M.

Gelijk men ziet, zijn de bepalingen der knooppunten verre van volledig en het zou zeker wenschelijk zijn,

ze op grooter schaal en met een compleet stel resonatoren te herhalen. Het is wel zeer de vraag, of men groote klokken, zooals de drie onderzochte, op eene geschiktere plaats dan in een toren vrij kan ophangen, zonder hinder van geraas en wind, terwijl men zijne resonatoren gemakkelijk hanteeren kan. Tegenover de bezwaren staat een groot voordeel, dat kleine klokken niet aanbieden: de afstanden der punten, waar de zwevingen verdwijnen, zijn groot. Bovendien zijn de tonen krachtiger en duren daardoor veel langer, zoodat zelfs zwevingen van ettelijke secunden gemakkelijk moeten kunnen gehoord worden.

OVERZICHT.

De hoofdresultaten van het hiervoor vermelde onderzoek mogen nog eens in het kort worden samengevat.

1°. De onderzochte klokken van HEMONY zijn *gelijkvormig*.

2°. De samenstelling van het klokkemetaal is nagenoeg *standvastig*.

3°. De tonenreeksen der klokken zijn in bijna volkomen overeenstemming met het beginsel der *dynamische gelijkvormigheid*.

4°. De relatieve intensiteit en duur der verschillende boventonen zijn voor alle klokken in hoofdzaak dezelfde.

5°. Bij alle klokken domineert de grondtoon bij aanslaan op het concave gedeelte, het hoogere octaaf op het convexe gedeelte.

6°. Er bestaat een wezenlijk verschil tusschen deze klokken en de door Lord RAYLEIGH onderzochte Engelsche klokken, wat de plaats aangaat, die de hoofdtoon in de tonenreeks van elke klok inneemt.

Naar aanleiding van het sub 3°. genoemde worde nog het volgende opgemerkt. In het artikel „On bells” ¹⁾ beweert RAYLEIGH, dat het beginsel voor klokken misschien *niet* zou gelden. Hij zegt: „I have been given to understand, however, that bells are not

¹⁾ Phil. Mag. 29, 1890, p. 12.

designed upon this principle" — en verder, dat hij erop gewezen is (waarschijnlijk door een klokkengieter), dat wanneer men naar den vorm eener klok, welker tonen $p, q, r \dots$ tot trillingsgetallen hebben, eene andere klok giet, waarvan de lineaire afmetingen tweemaal zoo klein zijn, de laatste geene tonen voortbrengt met trillingsgetallen $2p, 2q, 2r \dots$ enz. Nu maakt RAYLEIGH echter in zijne verhandelingen over klokken nergens melding van hare afmetingen, die hij dan ook hoogstwaarschijnlijk niet bepaald heeft. (Slechts éénmaal teekent hij een profiel en merkt daarbij op, dat dit gecopieerd is uit een werk van ZAMMINER.¹⁾ Natuurlijk is eene nauwkeurige meting daarvan in de allereerste plaats noodig, om te kunnen beoordeelen, in hoeverre aan de meetkundige gelijkvormigheid voldaan is.

Wanneer de evenredigheid tusschen afmetingen en trillingstijden *niet* bestaat, zegt RAYLEIGH verder, kan dit wel niet alleen verklaard worden door een verschil in elasticiteit van het metaal, veroorzaakt door verschillende wijzen van afkoelen na het gieten. Hij erkent echter, dat hij de hem gedane mededeeling zeer in twijfel trekt.

Uit hetgeen in de hoofdstukken III, IV en V vermeld is, kan men besluiten, dat er thans geen twijfel meer in dit opzicht behoeft te bestaan. De klokken van HEMONY, die ik onderzocht heb, zijn binnen de nauwkeurigheidsgrenzen van afwerking en waarneming gelijkvormig te noemen, zoowel naar hare afmetingen als naar de tonen, die zij kunnen voortbrengen.

Wanneer we mogen aannemen, dat de trillingswijzen eener klok, wat de afhankelijkheid van de dichtheid ρ en den elasticiteitsmodulus q aangaat, althans in hoofdzaak overeenkomen met die van een

¹⁾ Phil. Mag. 29, 1890, p. 13.

ring, dan zou men de ontoereikendheid van den invloed eener hardheidsverandering alleen maar kunnen laten gelden, wanneer de factor $\frac{p}{q}$ in de vergelijking

$$\tau = \frac{4 \pi a^2}{c s (s^2 - 1)} \sqrt{\frac{\rho (s^2 + 1)}{q}} \quad ^1)$$

nagenoeg standvastig was, d. w. z. onafhankelijk van de wijze waarop het klokkemetaal bereid, de temperatuur, waartoe het verhit en de wijze, waarop het afgekoeld is. Een speciaal onderzoek hieromtrent zou tot eene beslissing kunnen leiden. Het zou echter verwonderlijk moeten heeten, wanneer de factor $\frac{p}{q}$ niet in zóó sterke mate van de genoemde omstandigheden afhing, dat de toongelijkvormigheid er merkbaar door verstoord werd.

¹⁾ Zie pag. 33.

STELLINGEN.

I.

Het is buiten twijfel, dat HEMONY het principe der dynamische gelijkvormigheid bij het vervaardigen zijner klokken heeft toegepast.

II.

In het veld der zwaartekracht is voor geluidgevende lichamen bij evenredigheid van afmetingen strikt genomen geene evenredigheid van trillingstijden mogelijk.

III.

Het is waarschijnlijk, dat bij torenklokken de plaats van knoopcirkels, behoorende bij hare verschillende trillingswijzen, zeer weinig afhankelijk is van hare gedaante.

IV.

De meening, dat het beginsel der gelijkvormige bewegingstoestanden voor klokken misschien niet zou gelden, mist tot nu toe allen grond.

RAYLEIGH, *Phil. Mag.* 29, 1890, p. 12.

—

V.

De verklaring, die CHLADNI geeft van het ontstaan van sommige „Klirr-Töne” is onjuist.

CHLADNI, Akustik § 59.

VI.

De specifieke weerstand van natuurlijke kristallen van Antimoniet (Sb_2S_3) is in geene der drie hoofd-richtingen standvastig.

VII.

De uitkomsten der onderzoekingen van PERRIN omtrent de BROWN'sche beweging versterken de kinetische molecuulair-theorie in zeer hooge mate.

Ann. de Chim. et de Phys. 1909, T. XVIII, p. 1—114.

VIII.

De uitspraak van PERRIN, dat men de constante van AVOGADRO zoo nauwkeurig bepalen kan, als men wil, is overdreven.

IX.

De onderstelling van RIECKE, dat de vrije en gebondene electronen in een metaal in eene soort van bewegelijk evenwicht zijn, is niet vereenigbaar met de voorstelling, die hij zich maakt van den bouw van een metaalatoom.

Phys. Zeitschr. 1909, 508—510.

X.

RIECKE's voorstelling van de groepeerling der atomen in een metaal voert voor Bismuth tot eene berekening van den afstand zijner atomen, welke onhoudbaar is naast die voor de afmetingen der atomen zelf.

Phys. Zeitschr. 1909, 508—519.

XI.

Een bol, die met water van 0° gevuld, gesloten en afgekoeld wordt, springt niet door bevroren, maar door uitzetting der *vloeistof*.

XII.

Wanneer n een geheel getal is, kan men $\sin^2 \frac{\pi}{n}$ voor niet te kleine waarden van n bij benadering in eindigen vorm voorstellen door:

$$\sin^2 \frac{\pi}{n} = \frac{n^2 - 8n + 48 - (n - 6) \sqrt{n^2 - 4n - 4}}{4n^2}$$

XIII.

De bemiddeling van den aether tot het overbrengen van energie is niet minder onbegrijpelijk dan de actio in distans.

XIV.

Het verplichtend stellen van eenige lessen in de beginselen der differentiaal- en integraalrekening in de hoogste klassen der hogere burgerscholen zou aan docenten in natuur- en werktuigkunde niet minder dan aan hunne leerlingen veel tijd en moeite kunnen besparen.
